Решение задачи о назначениях

ЗАДАНИЕ. Решите задачу о назначениях:

$$C = \begin{pmatrix} 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 16 \\ 2 & 8 & 8 & 6 & 17 \\ 2 & 2 & 2 & 8 & 18 \\ 4 & 6 & 7 & 8 & 19 \end{pmatrix}$$

РЕШЕНИЕ.

1. Подготовительный этап. Максимальный элемент первого столбца матрицы C равен 15. Поэтому для получения первого столбца необходимо из 4 вычесть элементы первого столбца матрицы. Аналогично для получения второго, третьего, четвертого и пятого столбцов вычитаем элементы этих столбцов из максимальных элементов 16, 17, 18 и 19 соответственно.

$$\tilde{N} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 15 & 14 & 17 & 3 \\ 13 & 8 & 9 & 12 & 2 \\ 13 & 14 & 15 & 10 & 1 \\ 11 & 10 & 10 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из всех элементов каждой строки вычитаем минимальный элемент этой строки.

$$\tilde{N} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 12 & 11 & 14 & 0 \\ 11 & 6 & 7 & 10 & 0 \\ 12 & 13 & 14 & 9 & 0 \\ 11 & 10 & 10 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

В результате получаем матрицу C_0 с неотрицательными элементами, в каждой строке и каждом столбце которой имеется один нуль.

Помечаем независимые нули: в первом столбце выбираем произвольный нуль, тогда в остальных столбцах независимых нулей нет.

$$C_0 \sim \begin{pmatrix} 0^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 12 & 11 & 14 & 0 \\ 11 & 6 & 7 & 10 & 0 \\ 12 & 13 & 14 & 9 & 0 \\ 11 & 10 & 10 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

$+$

Среди невыделенных элементов матрицы C_0 есть нули, причем строка, содержащая невыделенный нуль, содержит также 0*.

Помечаем найденный нуль штрихом, помечаем знаком + строку, содержащую этот 0', и убираем знак выделения + над столбцом, который пересекается с выделенной строкой по 0*.

$$C_0 \sim \begin{pmatrix} 0^* & 0' & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 12 & 11 & 14 & 0 \\ 11 & 6 & 7 & 10 & 0 \\ 12 & 13 & 14 & 9 & 0 \\ 11 & 10 & 10 & 10 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$\oplus$

Среди невыделенных элементов матрицы C_0 есть нули, причем строка, содержащая невыделенный нуль, не содержит 0*. Помечаем найденный нуль штрихом:

$$C_0 \sim \begin{pmatrix} 0^* & 0' & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 12 & 11 & 14 & 0' \\ 11 & 6 & 7 & 10 & 0 \\ 12 & 13 & 14 & 9 & 0 \\ 11 & 10 & 10 & 10 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$\oplus$

Переходим к следующему шагу. Строим последовательность из элементов 0' и 0* матрицы C_0 по правилу:

а) последовательность начинается с исходного 0' (последнего нуля, помеченного штрихом);

б) от 0' по столбцу идем к 0* (если такой найдется);

в) от 0* по строке идем к 0';

г) повторяем пункт б).

В данном случае последовательность содержит только искомый (начальный) нуль со штрихом, выделен красным в матрице:

$$C_0 \sim \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0^* & 0' & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 12 & 11 & 14 & 0' \\ 11 & 6 & 7 & 10 & 0 \\ 12 & 13 & 14 & 9 & 0 \\ 11 & 10 & 10 & 10 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} + \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \oplus & & & & \end{array} & \end{array}$$

Полученную последовательность преобразуем так. Все 0* в последовательности заменяем на обыкновенные нули, все 0' в последовательности заменяем на 0*. Затем чистим матрицу C_0: убираем все штрихи, все знаки выделения +. В результате получаем матрицу C_0, в которой число независимых нулей (0*) увеличено на единицу. На этом итерация алгоритма завершается. Переходим к шагу 0.

$$C_0 \sim \begin{pmatrix} 0 & 0^* & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 12 & 11 & 14 & 0^* \\ 11 & 6 & 7 & 10 & 0 \\ 12 & 13 & 14 & 9 & 0 \\ 11 & 10 & 10 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

Снова проделываем все шаги с полученной матрицей C_0.

Помечаем выделенные столбцы:

$$C_0 \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0^* & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 12 & 11 & 14 & 0^* \\ 11 & 6 & 7 & 10 & 0 \\ 12 & 13 & 14 & 9 & 0 \\ 11 & 10 & 10 & 10 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} & + & & & + \end{array} \end{array}$$

Среди невыделенных элементов матрицы C_0 есть нули, причем строка, содержащая невыделенный нуль, содержит также 0*.

Помечаем найденный нуль штрихом, помечаем знаком + строку, содержащую этот 0', и убираем знак выделения + над столбцом, который пересекается с выделенной строкой по 0*.

$$C_0 \sim \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 0^* & 0' & 0 & 0 \\ 11 & 12 & 11 & 14 & 0^* \\ 11 & 6 & 7 & 10 & 0 \\ 12 & 13 & 14 & 9 & 0 \\ 11 & 10 & 10 & 10 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} + \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} & \oplus & & & + \end{array} & \end{array}$$

В матрице C_0 среди невыделенных элементов нет нулевых элементов. Поэтому:

а) выбираем среди невыделенных элементов минимальный и обозначаем его $h=6$;

б) величину $h>0$ вычитаем из всех элементов матрицы C_0, расположенных в не*выделенных строках*;

в) величину h прибавляем ко всем элементам матрицы C_0, расположенных в *выделенных столбцах*.

В результате получим эквивалентную матрицу C_0' с невыделенными нулевыми элементами. Полагаем $C_0 = C_0'$ и переходим к шагу 1.

$$C_0' \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 5 & 6 & 5 & 8 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Снова повторяем шаги.

$$C_0 \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0^* & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 5 & 6 & 5 & 8 & 0^* \\ 5 & 0^* & 1 & 4 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} + & + & & & + \end{array} \end{array}$$

Отмечено только три нуля, продолжаем расчеты.

Среди невыделенных элементов матрицы C_0 есть нули, причем строка, содержащая невыделенный нуль, содержит также 0*.

Помечаем найденный нуль штрихом, помечаем знаком + строку, содержащую этот 0', и убираем знак выделения + над столбцом, который пересекается с выделенной строкой по 0*.

$$C_0 \sim \begin{array}{cccccc} \left(\begin{matrix} 0^* & 0 & 0' & 0 & 6 \\ 5 & 6 & 5 & 8 & 0^* \\ 5 & 0^* & 1 & 4 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 4 & 4 & 0 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} + \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \oplus & + & & & + \end{matrix} & \end{array}$$

В матрице C_0 среди невыделенных элементов нет нулевых элементов. Поэтому:

а) выбираем среди невыделенных элементов минимальный и обозначаем его $h=1$;

б) величину $h>0$ вычитаем из всех элементов матрицы C_0, расположенных в не*выделенных строках*;

в) величину h прибавляем ко всем элементам матрицы C_0, расположенных в *выделенных столбцах*.

В результате получим эквивалентную матрицу C_0' с невыделенными нулевыми элементами. Полагаем $C_0 = C_0'$ и переходим к шагу 1.

$$C_0' \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 4 & 6 & 4 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 7 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Получаем:

$$C_0 \sim \begin{array}{c} \left(\begin{matrix} 0^* & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 4 & 6 & 4 & 7 & 0^* \\ 4 & 0^* & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 7 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & 0 \end{matrix}\right) \\ \begin{matrix} + & + & & & + \end{matrix} \end{array}$$

Отмечено только три нуля, продолжаем расчеты.

Среди невыделенных элементов матрицы C_0 есть нули, причем строка, содержащая невыделенный нуль, содержит также 0*.

Помечаем найденный нуль штрихом, помечаем знаком + строку, содержащую этот 0', и убираем знак выделения + над столбцом, который пересекается с выделенной строкой по 0*.

$$C_0 \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0^* & 1 & 0' & 0 & 7 \\ 4 & 6 & 4 & 7 & 0^* \\ 4 & 0^* & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 7 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} + \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \oplus & + & & & + \end{array} \end{array} \qquad C_0 \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0^* & 1 & 0' & 0 & 7 \\ 4 & 6 & 4 & 7 & 0^* \\ 4 & 0^* & 0' & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 7 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} + \\ \\ + \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \oplus & \oplus & & & + \end{array} \end{array}$$

В матрице C_0 среди невыделенных элементов нет нулевых элементов. Поэтому:

а) выбираем среди невыделенных элементов минимальный и обозначаем его $h=2$;

б) величину $h>0$ вычитаем из всех элементов матрицы C_0, расположенных в не*выделенных строках*;

в) величину h прибавляем ко всем элементам матрицы C_0, расположенных в *выделенных столбцах*.

В результате получим эквивалентную матрицу C_0' с невыделенными нулевыми элементами. Полагаем $C_0 = C_0'$ и переходим к шагу 1.

$$C_0' \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Получили:

$$C_0 \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0^* & 1 & 0 & 0 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 5 & 0^* \\ 4 & 0^* & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 5 & 0^* & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} + & + & & + & + \end{array} \end{array}$$

Отмечено только четыре нуля, продолжаем расчеты.

Среди невыделенных элементов матрицы C_0 есть нули, причем строка, содержащая невыделенный нуль, содержит также 0*.
Помечаем найденный нуль штрихом, помечаем знаком + строку, содержащую этот 0', и убираем знак выделения + над столбцом, который пересекается с выделенной строкой по 0*.

$$C_0 \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0^* & 1 & 0' & 0 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 5 & 0^* \\ 4 & 0^* & 0' & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 5 & 0^* & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} + \\ \\ + \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \oplus & \oplus & & + & + \end{array} \end{array}$$

В матрице C_0 среди невыделенных элементов нет нулевых элементов. Поэтому:

а) выбираем среди невыделенных элементов минимальный и обозначаем его $h=1$;

б) величину $h>0$ вычитаем из всех элементов матрицы C_0, расположенных в не*выделенных строках*;

в) величину h прибавляем ко всем элементам матрицы C_0, расположенных в *выделенных столбцах*.

В результате получим эквивалентную матрицу C_0' с невыделенными нулевыми элементами. Полагаем $C_0=C_0'$ и переходим к шагу 1.

$$C_0' \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & 3 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Выделяем независимые нули:

$$C_0 \sim \begin{pmatrix} 0^* & 1 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & 3 & 1 & 5 & 0^* \\ 4 & 0^* & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 0^* & 0 \\ 1 & 1 & 0^* & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} + & + & + & + & + \end{matrix}$$

Нулей ровно 5. Решение найдено.
Максимальная эффективность равна:

$$L(X) = c_{11} + c_{25} + c_{32} + c_{44} + c_{53} =$$

$$= 15 + 16 + 8 + 8 + 7 = 54.$$

При этом следует:

Назначить 1-го работника на 1-ю работу.

Назначить 2-го работника на 5-ю работу.

Назначить 3-го работника на 2-ю работу.

Назначить 4-го работника на 4-ю работу.

Назначить 5-го работника на 3-ю работу.