Микроэкономика, пример решения задачи
Производственная функция Кобба-Дугласа

ЗАДАНИЕ.

Задана производственная функция Кобба-Дугласа $f(x_1, x_2) = 12x_1^{1/2}x_2^{1/3}$

Изобразить изокванту, соответствующую плану (36,27). Какое количество продукта выпускается при этом плане?

Найти первый, второй предельные продукты для плана (36,27) и дать экономическую интерпретацию полученным результатам.

Каким эффектом от расширения масштабов производства характеризуется производственная функция

Каковы затраты производителя на покупку ресурсов при плане производства (36,27) и заданном векторе цен на ресурсы (3,4)?

Найти самый дешевый (оптимальный) план по ресурсам, обеспечивающий выпуск такого же количества продукции, что и для плана (36,27). Найти аналитически решение этой задачи

методом Лагранжа

методом подстановки.

Сделать геометрическую иллюстрацию решения задачи, изобразив ОДР и целевую функцию линиями уровня.

РЕШЕНИЕ.

Для начала выясним, какое количество продукта получается при плане (36,27). Для этого подставим в ПФ значения $x_1^0 = 36$ и $x_2^0 = 27$.

Получим

$f(36, 27) = 12*(36)^{1/2}(27)^{1/3} = 216$ ед.

Построим *изокванту* – уровень производственной функции. Изоквантой называется множество планов производства, дающих одинаковый объем выпускаемой продукции.

Затраты первого и второго ресурсов для всех планов производства, обеспечивающих выпуск 216 единиц продукции, связаны уравнением:

$$12x_1^{1/2}x_2^{1/3} = 216$$

Отсюда

$$x_1^{1/2} = \frac{216}{12x_2^{1/3}} \Rightarrow x_1 = \frac{324}{x_2^{2/3}}$$

Графиком полученной функции в пространстве ресурсов является изокванта, соответствующая выпуску 216 единиц продукции.

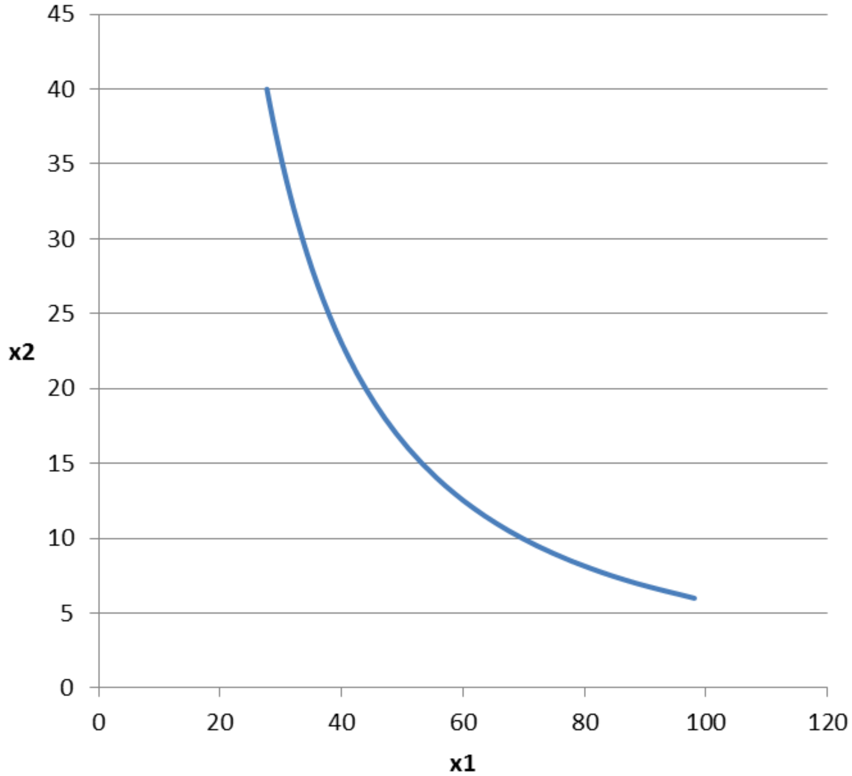

Рис. 1. Изокванта

Затраты на покупку ресурсов при данном плане составят:

$$x_1^0 w_1 + x_2^0 w_2 = 36*3 + 27*4 = 216 \text{ д.е.}$$

Вычислим первый и второй предельный продукты для плана (36,27) – это частные производные ПФ:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=12*\frac{1}{2x_1^{1/2}}*x_2^{1/3}\Bigg|_{(36,27)}=12*\frac{3}{2*6}=3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=12*\frac{1}{3x_2^{3/2}}*x_1^{1/2}\Bigg|_{(36,27)}=12*\frac{6}{3*3}=8$$

Экономический смысл частных производных ПФ

Предельный продукт первого ресурса при данном плане равен 3, это означает, что при увеличении затрат первого ресурса на единицу и неизменных затратах второго выпуск продукции увеличится примерно на 3 ед.

Предельный продукт второго ресурса при данном плане равен 8, это означает, что при увеличении затрат второго ресурса на единицу и неизменных затратах первого выпуск продукции увеличится примерно на 8 ед.

Решим задачу условной оптимизации аналитическими методами.

$$G(x)=3x_1+4x_2\to\min,\ 12x_1^{1/2}x_2^{1/3}=216$$

Решение методом подстановки.

Допустимое множество задачи, определяемое уравнением связи

$$f(x)=12x_1^{1/2}x_2^{1/3}-216=0$$

представляет собой неограниченную кривую, график которой приведен выше. Вопрос о существовании решения задачи остается открытым.

Выразим из уравнения связи переменную x_1:

$$12x_1^{1/2}x_2^{1/3}=216$$

$$x_1^{1/2}=\frac{18}{x_2^{1/3}}$$

$$x_1=\frac{324}{x_2^{2/3}}$$

Подставим ее в функцию G(x):

$$G(x_2) = 3*\frac{324}{x_2^{2/3}} + 4x_2 \to \min,\ x_2 > 0$$

Получилась функция от одной переменной, для которой мы должны найти наименьшее значение на (0, ∞).

Вычислим производную: $G'(x_2) = -\frac{648}{x_2^{5/3}} + 4$

Легко видеть, что G имеет единственную критическую точку $x_2^* = 162^{3/5}$.

Вычислим вторую производную функции: $G''(x_2) = \frac{1080}{x_2^{8/3}}$

Так как $G''(x_2)$ > 0, точка x_2^*– локальный минимум. Более того, поскольку $G''(x_2)$ > 0 для всех x_2 > 0, точка x_2^*– глобальный минимум в силу выпуклости функции.

Глобальный минимум x_2^* порождает глобальный минимум исходной задачи $(x_1^*; x_2^*)$, причем значение может быть получено из уравнения связи:

$$x_1^* = \frac{324}{x_2^{2/3}} = \frac{324}{\left(162^{3/5}\right)^{2/3}} = \frac{324}{162^{2/5}}$$

Наименьшие затраты на ресурсы при данном оптимальном плане производства составят

$$G(x_1^*; x_2^*) = 3*\frac{324}{162^{2/5}} + 4*162^{3/5} \approx 211.69 \text{ д.е.}$$

Решение методом Лагранжа.

Составим функцию Лагранжа:

$$L = 3x_1 + 4x_2 - \lambda\left(12x_1^{1/2}x_2^{1/3} - 216\right)$$

Найдем критические точки функции Лагранжа, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} L'_{x1} = 3 - 6\dfrac{\lambda x_2^{1/3}}{x_1^{1/2}} = 0 \\ L'_{x2} = 4 - 3\dfrac{\lambda x_1^{1/2}}{x_2^{2/3}} = 0 \\ L'_{\lambda} = -12 x_1^{1/2} x_2^{1/3} + 216 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{324}{x_2^{2/3}}$$

$$\begin{cases} 3 - 6\dfrac{\lambda x_2^{1/3}}{\left(\dfrac{324}{x_2^{2/3}}\right)^{1/2}} = 0 \\ 4 - 3\dfrac{\lambda\left(\dfrac{324}{x_2^{2/3}}\right)^{1/2}}{x_2^{2/3}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 - \dfrac{\lambda x_2^{2/3}}{3} = 0 \\ 4 - \dfrac{54\lambda}{x_2} = 0 \end{cases}$$

Решая систему, получим единственную критическую точку функции Лагранжа $\left(x_1^*; x_2^*; \lambda\right) = \left(\dfrac{324}{162^{2/5}}; 162^{3/5}; \dfrac{2}{27}162^{3/5}\right)$, которая порождает критическую точку исходной задачи $\left(x_1^*; x_2^*\right)$.

$$G\left(x_1^*; x_2^*\right) = 3 * \frac{324}{162^{2/5}} + 4 * 162^{3/5} \approx 211.69 \text{ д.е.}$$