Пример решения интегрального уравнения с симметричным ядром

ЗАДАНИЕ.

Для симметричного ядра

$$K(x,t)=\frac{1}{2}\sin|x-t| \quad (0\le x\le t\le \pi) \qquad (4.16.1)$$

найти характеристические числа и соответствующие им собственные функции, сводя интегральное уравнение к однородной краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения.

РЕШЕНИЕ.

Однородное интегральное уравнение

$$y(x)-\lambda\int_0^{\pi}K(x,t)y(t)dt=0$$

с ядром (4.16.1) запишем следующим образом:

$$y(x)=\frac{\lambda}{2}\left[\int_0^x \sin|t-x|y(t)dt+\int_x^{\pi}\sin|x-t|y(t)dt\right]. \qquad (4.16.2)$$

Дважды продифференцируем (4.16.2):

$$y'(x)=\frac{\lambda}{2}\left[\int_0^x \cos|t-x|y(t)dt+\int_x^{\pi}\cos|x-t|y(t)dt\right],$$

$$y''(x)=\frac{\lambda}{2}\left[y(x)-\int_0^x \sin|t-x|y(t)dt+y(x)-\int_x^{\pi}\sin|x-t|y(t)dt\right]=$$
$$=\lambda y(x)-\frac{\lambda}{2}\left[\int_0^x \sin|t-x|y(t)dt+\int_x^{\pi}\sin|x-t|y(t)dt\right],$$

$$y''(x)=\lambda y(x)-y(x),$$

$$y''(x)=(\lambda-1)y(x).$$

Число λ и функция y(x) таковы, что

$y^{//}(x)+(1-\lambda)y(x)=0$.

(4.16.3)

Заметим, что

$y(0) + y(\pi) = 0$, $y^{/}(0) + y^{/}(\pi) = 0$,

(4.16.4)

Уравнение (4.16.3) и условия (4.16.4) образуют однородную краевую задачу, решая которую найдем характеристические числа и соответствующие им собственные функции исходного интегрального уравнения. Рассмотрим три случая:

1) $\lambda = 1$. Уравнение (4.16.3) принимает вид $y^{//}(x) = 0$, его общее решение $y(x) = C_1 + C_2x$. Используя краевые условия (4.16.4), получим, что $C_1 = C_2 = 0$. Следовательно, краевая задача, а вместе с ней и уравнение (4.16.2) имеет лишь тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

2) Пусть $\lambda > 1$. Тогда $\lambda = k^2 + 1$, $k > 0$. Уравнение (4.16.3) принимает вид $y^{//}(x)-k^2y(x)=0$, его общее решение $y(x)=C_1e^{kx}+C_2e^{-kx}$. Краевые условия (4.16.4) приводят к системе

$C_1 + C_2 + C_1e^{\pi k} + C_2e^{-\pi k} = 0$, $C_1(1 + e^{\pi k}) + C_2(1 + e^{-\pi k}) = 0$,

$kC_1 - kC_2 + kC_1e^{\pi k} - kC_2e^{-\pi k} = 0$, $C_1k(1 + e^{\pi k}) + C_2k(-1 - e^{-\pi k}) = 0$

или

$$\begin{vmatrix} 1+e^{\pi k} & 1+e^{-\pi k} \\ k(1+e^{\pi k}) & k(-1-e^{-\pi k}) \end{vmatrix} = 0,$$

$4k(\mathrm{ch}\pi k + 1) = 0$.

(4.16.5)

В свою очередь (4.16.5) не имеет решений.

3) Пусть $\lambda < 1$. Тогда $\lambda = 1 - k^2$, $k > 0$. Уравнение (4.16.3) принимает вид $y''(x) + k^2 y(x) = 0$, его общее решение $y(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$. Краевые условия (4.16.4) приводят к системе

$C_1 + C_1\cos\pi k + C_2\sin\pi k = 0$, $C_1(1 + \cos k\pi) + C_2\sin k\pi = 0$,

$kC_2 - kC_1\sin\pi k + kC_2\cos\pi k = 0$, $C_1(-k\sin\pi k) + C_2k(1 + \cos\pi k) = 0$

или

$$\begin{vmatrix} 1+\cos\pi k & \sin\pi k \\ -k\sin\pi k & k(1+\cos\pi k) \end{vmatrix} = 0,$$

$2k(1 + \cos\pi k) = 0$. (4.16.5)

Следовательно, при нечетном k (k = 1, 3, 5, 7, …) получаем, что $\lambda = 1 - k^2$ является характеристическим числом для заданного ядра (4.16.1). В результате получим следующую собственную функцию:

$y_k(x) = \cos kx + \cos k(x-\pi)$ или $y_k(x) = 2\cos\left(kx - \frac{k\pi}{2}\right)\cos\frac{k\pi}{2}$.