

Пример решения задачи Интегральное уравнение с вырожденным ядром

ЗАДАНИЕ.

Решить или установить неразрешимость уравнений с вырожденным ядром.

$$y(x) = 2 - 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x - 2t)y(t)dt.$$

РЕШЕНИЕ.

Перепишем уравнение в виде

$$y(x) = 2 - 3 \sin x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t y(t)dt + 3 \cos x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t y(t)dt.$$

Обозначим $C_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t y(t)dt$, $C_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t y(t)dt$. Тогда $y(x) = 2 - 3C_1 \sin x + 3C_2 \cos x$.

Подставляя в выражения для констант, получим:

$$\begin{aligned} & 2 - 3C_1 \sin x + 3C_2 \cos x \\ &= 2 - 3 \sin x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t (2 - 3C_1 \sin t + 3C_2 \cos t)dt \\ &+ 3 \cos x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t (2 - 3C_1 \sin t + 3C_2 \cos t)dt \\ &= 2 - 3 \sin x (C_1 + C_2) + 3 \cos x (2 - 2C_1 + 2C_2). \end{aligned}$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты, получим: $C_1 + C_2 = C_1$, $C_2 = 2 - 2C_1 + 2C_2$. Отсюда $C_2 = 0$, $C_1 = 1$. Значит, решением уравнения будет $y(x) = 2 - 3 \sin x$.

Решение задачи по интегральным уравнениям скачано с

https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=maintur

(больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию