Задача скачана с сайта www.MatBuro.ru
Еще примеры: https://www.matburo.ru/ex_dm.php?p1=dmmmi
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике

Метод математической индукции

Пример решения задачи

Задание. *Докажите, что* $5^n - 4n + 15$ *делится на 16 при всех* $n \in N_0$.

Решение.

Используем метод математической индукции.

Проверим для $n = 0$: $5^0 - 4 \cdot 0 + 15 = 16$ делится на 16, для $n = 1$: $5^1 - 4 \cdot 1 + 15 = 16$ делится на 16, для $n = 2$: $5^2 - 4 \cdot 2 + 15 = 32$ делится на 16.

Допустим, что утверждение верно при $n = k$, то есть $5^k - 4k + 15$ делится на 16. Для $n = k + 1$ выражение $5^n - 4n + 15$ примет вид:

$$5^{k+1} - 4(k+1) + 15 = 5 \cdot 5^k - 4k + 11$$
$$= 5 \cdot 5^k - 4k \cdot 5 + 15 \cdot 5 + 4k \cdot 5 - 15 \cdot 5 - 4k + 11 =$$
$$= 5(5^k - 4k + 15) + 20k - 75 - 4k + 11 = 5(5^k - 4k + 15) + 16k - 64 =$$
$$= 5(5^k - 4k + 15) + 16(k - 4)$$

Так как $5^k - 4k + 15$ делится на 16, то $5(5^k - 4k + 15)$ делится на 16. Так как $5(5^k - 4k + 15)$ делится на 16 и $16(k - 4)$ делится на 16, то $5(5^k - 4k + 15) + 16(k - 4)$ делится на 16. Итак, если $5^k - 4k + 15$ делится на 16, то и $5^{k+1} - 4(k+1) + 15$ делится на 16.

Утверждение верно для $n = 0, 1, 2$. Если утверждение верно для $n = k$, то оно верно и для $n = k + 1$. Тогда утверждение верно для любого целого неотрицательного n, что и требовалось доказать.