

Решение задачи о минимизации булевой функции

Задача. Для функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, заданной списком номеров наборов из N_f методом Квайна найти сокращенную и минимальные ДНФ.

Список номеров: 0,1,2,3,6,7,8,9,11,15.

Решение. Составим таблицу истинности для функции f :

№	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	1

Выпишем $N_f = \{0000, 0001, 0010, 0011, 0110, 0111, 1000, 1001, 1011, 1111\}$.

Так как число переменных велико, для удобства будем использовать модифицированный метод Квайна-МакКласки. Разобьем конституэнты на группы по числу единиц:

- 0) 0000
- 1) 0001, 0010, 1000
- 2) 0011, 0110, 1001
- 3) 0111, 1011
- 4) 1111

Склеиваем конституэнты из соседних групп:

Группы 0 и 1:

$$0000+0001 = 000-$$

$$0000+0010 = 00-0$$

$$0000+1000 = -000$$

Группы 1 и 2:

$$0001+0011 = 00-1$$

$$0001+1001 = -001$$

$$0010+0011 = 001-$$

$$0010+0110 = 0-10$$

$$1000+1001 = 100-$$

Группы 2 и 3:

$$0011+0111 = 0-11$$

$$0011+1011 = -011$$

$$0110+0111 = 011-$$

$$1001+1011 = 10-1$$

Группы 3 и 4:

$$0111+1111 = -111$$

$$1011+1111 = 1-11$$

Все конституэнты подверглись склеиванию, получили новые группы:

0) $000-$, $00-0$, -000

1) $00-1$, -001 , $001-$, $0-10$, $100-$

2) $0-11$, -011 , $011-$, $10-1$

3) -111 , $1-11$

Снова прибегаем к склеиванию.

Группы 0 и 1:

$$000- + 001- = 00--$$

$$000- + 100- = -00-$$

$$00-0 + 00-1 = 00--$$

$$-000 + -001 = -00-$$

Группы 1 и 2:

$$00-1 + 10-1 = -0-1$$

$$-001 + -011 = -0-1$$

$$001- + 011- = 0-1-$$

$$0-10 + 0-11 = 0-1-$$

Группы 2 и 3:

$$0-11 + 1-11 = --11$$

$$-011 + -111 = --11$$

Все конституэнты подверглись склеиванию, получили новые группы:

0) $00--$, $-00-$

1) -0-1, 0-1-

2) --11

Дальнейшее склеивание невозможно.

Итак, получили $D_{\text{сокр.}} = \overline{x_1}x_2 \vee x_2x_3 \vee x_2x_4 \vee x_1x_3 \vee x_3x_4$.

$$N_f = \{0000, 0001, 0010, 0011, 0110, 0111, 1000, 1001, 1011, 1111\}$$

Строим импликантную таблицу, в столбцах элементарные конъюнкции СДНФ, в строках – простые импликанты сокращенной ДНФ. Ставим в ячейке плюс, если простая импликанта покрывает элементарную конъюнкцию.

Получаем:

	0000	0001	0010	0011	0110	0111	1000	1001	1011	1111
00-- $\overline{x_1}x_2$	+	+	+	+						
-00- $\overline{x_2}x_3$	+	+					+	+		
-0-1 $\overline{x_2}x_4$		+		+				+	+	
0-1- $\overline{x_1}x_3$			+	+	+	+				
--11 x_3x_4				+		+			+	+

Выбираем столбцы, содержащие только по одному плюсу (это столбцы 5, 7, 10), импликанты строк, соответствующих этим плюсам попадают в ядровую ДНФ, то есть $D_{\text{ядр.}} = \overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_3 \vee x_3x_4$ (позначили эти импликанты *). Теперь вычеркиваем строки (отмечаем серой заливкой), соответствующие ядровым импликантам, а затем столбцы, содержащие отмеченные клетки в вычеркнутых строках, это будут все столбцы. Получаем:

	0000	0001	0010	0011	0110	0111	1000	1001	1011	1111
00-- $\overline{x_1}x_2$	+	+	+	+						
-00- $\overline{x_2}x_3$ *	+	+					+	+		
-0-1 $\overline{x_2}x_4$		+		+				+	+	
0-1- $\overline{x_1}x_3$ *			+	+	+	+				
--11 x_3x_4 *				+		+			+	+

Таким образом, минимальная ДНФ равна $D_{\text{мин.}} = \overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_3 \vee x_3x_4$