

Алгебра. Линейные преобразования

Пример решения задачи

Задача. Даны два линейных преобразования:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 + 2x_3, \\ x_2' = -3x_2 + x_3, \\ x_3' = 2x_1 + 3x_3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1'' = 3x_1' + x_2', \\ x_2'' = x_1' - 2x_2' - x_3', \\ x_3'' = 3x_2' + 2x_3'. \end{cases}$$

Средствами матричного исчисления найти преобразование, выражающее x_1'', x_2'', x_3'' через x_1, x_2, x_3 .

Решение. Обозначим преобразования следующим образом (запишем в матричном виде):

$$X' = AX, \quad X'' = BX', \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $X'' = BX' = BAX$ - преобразование, выражающее x_1'', x_2'', x_3'' через x_1, x_2, x_3 .

Получаем:

$$\begin{aligned} X'' &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} X = \\ &= \begin{pmatrix} 3+0+0 & 6-3+0 & 6+1+0 \\ 1+0-2 & 2+6+0 & 2-2-3 \\ 0+0+4 & 0-9+0 & 0+3+6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 7 \\ -1 & 8 & -3 \\ 4 & -9 & 9 \end{pmatrix} X. \end{aligned}$$

Искомое преобразование:

$$\begin{cases} x_1'' = 3x_1 + 3x_2 + 7x_3, \\ x_2'' = -x_1 + 8x_2 - 3x_3, \\ x_3'' = 4x_1 - 9x_2 + 9x_3. \end{cases}$$