Базис линейного подпространства

Пример решения задачи по алгебре

Задача. *Найти ортогональный базис подпространства* L, *заданного системой уравнений, и базис подпространства* $L^{\perp}$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Решение. Преобразуем уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ -3x_2 + x_3 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

1) $x_3 = 1;\ x_4 = 0;\ x_5 = 0\ \Rightarrow$

$x_2 = \frac{1}{3};\ x_1 = -\frac{4}{3}\ \Rightarrow e_1 = \ (-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0, 0) = (-4,\ 1,\ 3,\ 0,\ 0)$

2) $x_3 = 0;\ x_4 = 1;\ x_5 = 0\ \Rightarrow$

$x_2 = 0;\ x_1 = -1\ \Rightarrow e_2 = \ (-1, 0, 0, 1, 0)$

3) $x_3 = 0;\ x_4 = 0;\ x_5 = 1\ \Rightarrow$

$x_2 = -1;\ x_1 = 0\ \Rightarrow e_3 = \ (0, -1, 0, 0, 1)$

Ортогонализируем по методу Грамма – Шмидта:

$$y_1=\frac{e_3}{(e_3,e_3)}=(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$y_2=\frac{e_2}{(e_2,e_2)}=(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{1}{\sqrt{2}},0)$$

$$y_3*(y_3,y_3)=e_1-(e_1,y_1)*y_1-(e_1,y_2)*y_2=(-4,\ 1,\ 3,\ 0,\ 0)-\frac{1}{\sqrt{2}}*(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{1}{\sqrt{2}})-$$

$$-\frac{4}{\sqrt{2}}*(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{1}{\sqrt{2}},0)=(-2,\ \frac{1}{2},\ 3,\ -2,\ \frac{1}{2})$$

$$y_3=(-\frac{4}{\sqrt{70}},\ \frac{1}{\sqrt{70}},\ \frac{6}{\sqrt{70}},\ -\frac{4}{\sqrt{70}},\ \frac{1}{\sqrt{70}})$$

Т.к. размерость вектор – строки – 5, *то* $\dim L^{\perp}=5-\dim L\Rightarrow \dim L^{\perp}=2$

$$a=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$$

$$\begin{cases} a*y_1=0\\ a*y_2=0\\ a*y_3=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} -a_2+a_5=0\\ -a_1+a_4=0\\ -4a_1+a_2+6a_3-4a_4+a_5=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} -a_2+a_5=0\\ -a_1+a_4=0\\ a_3=0\end{cases}$$

решение: $c_1=(1,0,0,1,0);\ c_2=(0,1,0,0,1)$

Ответ:

Базис $L-(y_1,y_2,y_3)$, *базис* $L^{\perp}-(c_1,c_2)$