

Базис линейного подпространства

Пример решения задачи по алгебре

Задача. Найти ортогональный базис подпространства L , заданного системой уравнений, и базис подпространства L^\perp .

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Решение. Преобразуем уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ -3x_2 + x_3 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

1) $x_3 = 1; x_4 = 0; x_5 = 0 \Rightarrow$

$$x_2 = \frac{1}{3}; x_1 = -\frac{4}{3} \Rightarrow e_1 = \left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0, 0\right) = (-4, 1, 3, 0, 0)$$

2) $x_3 = 0; x_4 = 1; x_5 = 0 \Rightarrow$

$$x_2 = 0; x_1 = -1 \Rightarrow e_2 = (-1, 0, 0, 1, 0)$$

3) $x_3 = 0; x_4 = 0; x_5 = 1 \Rightarrow$

$$x_2 = -1; x_1 = 0 \Rightarrow e_3 = (0, -1, 0, 0, 1)$$

Ортогонализируем по методу Грамма – Шмидта :

$$y_1 = \frac{e_3}{(e_3, e_3)} = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$y_2 = \frac{e_2}{(e_2, e_2)} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$$

$$y_3 * (y_3, y_3) = e_1 - (e_1, y_1) * y_1 - (e_1, y_2) * y_2 = (-4, 1, 3, 0, 0) - \frac{1}{\sqrt{2}} * (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) -$$

$$-\frac{4}{\sqrt{2}} * (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = (-2, \frac{1}{2}, 3, -2, \frac{1}{2})$$

$$y_3 = (-\frac{4}{\sqrt{70}}, \frac{1}{\sqrt{70}}, \frac{6}{\sqrt{70}}, -\frac{4}{\sqrt{70}}, \frac{1}{\sqrt{70}})$$

Т.к. размерность вектор – строки – 5, то $\dim L^\perp = 5 - \dim L \Rightarrow \dim L^\perp = 2$

$$a = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$$

$$\begin{cases} a * y_1 = 0 \\ a * y_2 = 0 \\ a * y_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a_2 + a_5 = 0 \\ -a_1 + a_4 = 0 \\ -4a_1 + a_2 + 6a_3 - 4a_4 + a_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a_2 + a_5 = 0 \\ -a_1 + a_4 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

решение : $c_1 = (1, 0, 0, 1, 0)$; $c_2 = (0, 1, 0, 0, 1)$

Ответ :

Базис $L = (y_1, y_2, y_3)$, базис $L^\perp = (c_1, c_2)$