Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Пример решения задачи по алгебре

Задача. *Привести квадратичную форму к каноническому виду: а) методом Якоби, б) методом Лагранжа. Найти канонический базис и матрицу перехода к каноническому базису.*

$k(\vec{x}) = 4x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3.$

Решение.

1. Метод Якоби

Вычислим главные миноры

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -16$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16$$

$$\Delta_2 = 4$$

Тогда,

$$k(y) = 4y_1^2 + \frac{16}{4}y_2^2 - \frac{16}{16}y_3^2 = 4y_1^2 + 4y_2^2 - y_3^2$$

1. Метод Лагранжа

$$k(\vec{x}) = 4x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3 = 4\left(x_1^2 + x_1x_3 + 2x_1x_2 + x_2^2 + \frac{x_3^2}{4}\right) + 4x_2^2 + 4x_2x_3 =$$

$$= 4\left(x_1 + x_2 + \frac{x_3}{2}\right)^2 + 4\left(x_2^2 + x_2x_3 + \frac{x_3^2}{4} - \frac{x_3^2}{4}\right) = 4\left(x_1 + x_2 + \frac{x_3}{2}\right)^2 + 4\left(x_2 + \frac{x_3}{2}\right)^2 - x_3^2$$

Тогда,

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 2x_2 + x_3 \\ y_2 = 2x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

Тогда, матрица перехода есть $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$