Метод Феррари решения уравнения 4 степени

Пример решения задачи по алгебре

Задача. Найти все корни алгебраических уравнений:

$x^4-2x^2-24x+72=0$

Решение. Используем метод Феррари. Преобразовываем уравнение:

$x^4-2x^2-24x+72=0,$

$4x^4-8x^2=96x-288,$

$4x^4-8x^2+4\lambda x^2+(\lambda-2)^2=96x-288+4\lambda x^2+(\lambda-2)^2,$

$4x^4+4(\lambda-2)x^2+(\lambda-2)^2=96x-288+4\lambda x^2+(\lambda-2)^2,$

$\left(2x^2+\lambda-2\right)^2=96x-288+4\lambda x^2+\lambda^2-4\lambda+4,$

$\left(2x^2+\lambda-2\right)^2=96x-284+4\lambda x^2+\lambda^2-4\lambda.$

Если дискриминант квадратного трехчлена из правой части равен нулю, то есть

$\lambda^3-4\lambda^2+\left(4-4\cdot 72\right)\lambda-24^2=0,$ (*)

То уравнение перепишется в виде:

$$\left(2x^2+\lambda-2\right)^2=4\lambda\left(x-\frac{-24}{2\lambda}\right)^2.$$

Получим в итоге два квадратных уравнения:

$$2x^2+\lambda-2=\pm 2\sqrt{\lambda}\left(x+\frac{12}{\lambda}\right).$$

Решаем уравнение (*):

$\lambda^3-4\lambda^2+\left(4-4\cdot 72\right)\lambda-24^2=0,$

$\lambda^3-4\lambda^2-284\lambda-576=0.$

Приведем это уравнение к не полному виду. $a=-4,\ b=-284,\ c=-576$. Делаем замену:

$\lambda=y-a/3=y+4/3$ и получаем:

$$y^3-\frac{868}{3}y-\frac{25904}{27}=0.$$

Корни этого уравнения равны:

$y_1=A+B$, $y_2=-\frac{A+B}{2}+i\frac{A-B}{2}\sqrt{3}$, $y_3=-\frac{A+B}{2}-i\frac{A-B}{2}\sqrt{3}$, где

$A=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{Q}}$, $B=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{Q}}$, $Q=\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2$, $p=-686/3$, $q=-25904/27$.

Получаем:

$$Q=\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=\left(-\frac{686}{9}\right)^3+\left(-\frac{25904}{54}\right)^2=-\frac{155074552}{729}.$$

$$A=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{Q}}=\sqrt[3]{\frac{12952}{27}+\sqrt{-\frac{155074552}{729}}}=\sqrt[3]{\frac{12952}{27}+\frac{2i}{27}\sqrt{38768638}}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{12952+2i\sqrt{38768638}}$$

$$B=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{Q}}=\sqrt[3]{\frac{12952}{27}-\sqrt{-\frac{155074552}{729}}}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{12952-2i\sqrt{38768638}}$$

Тогда

$$\lambda_1=y_1+4/3=A+B+4/3$$

$$\lambda_2=-\frac{A+B}{2}+i\frac{A-B}{2}\sqrt{3}+4/3,$$

$$\lambda_3=-\frac{A+B}{2}-i\frac{A-B}{2}\sqrt{3}+4/3.$$

Выбираем любой из полученных корней. Для простоты берем $\lambda_1=y_1+4/3=A+B+4/3$ и переходим к двум квадратным уравнениям:

$$2x^2+\lambda_1-2=\pm 2\sqrt{\lambda_1}\left(x+\frac{12}{\lambda_1}\right).$$

Решая эти квадратные уравнения, можно найти все решения исходного уравнения. Поскольку промежуточные результаты очень громоздкие, вычисления до конца доводить не будем.