Действия с многочленами

Пример решения задачи по алгебре

Задача. Даны многочлены $f(z)=z^4-3z^3+z^2+4$ и $g(z)=z^2-2z-3$.

Требуется:

а) подобрать целые нули многочлена $f(z)$ среди делителей свободного члена;

б) разложить многочлен $f(z)$ на линейные и неприводимые квадратичные множители с действительными коэффициентами;

в) разложить многочлен $f(z)$ на линейные множители с комплексными коэффициентами;

г) представить дробь $\dfrac{g(z)}{f(z)}$ в виде суммы простейших дробей с действительными коэффициентами.

Решение

а) Целыми делителями числа 4 являются: ±1, ±2, ±4.

В результате проверки убеждаемся, что $z=2$ является нулём многочлена $f(z)$, так как $f(2)=0$.

Следовательно, многочлен $f(z)$ делится на $z-2$.

Выполним деление:

$$
\begin{array}{l|l}
z^4-3z^3+z^2+4 & z-2 \\
\cline{2-2}
\underline{z^4-2z^3} & z^3-z^2-z-2 \\
\quad -z^3+z^2+4 & \\
\quad \underline{-z^3+2z^2} & \\
\qquad -z^2+4 & \\
\qquad \underline{-z^2+2z} & \\
\qquad\quad -2z+4 & \\
\qquad\quad \underline{-2z+4} &
\end{array}
$$

Таким образом, $f(z)=z^4-3z^3+z^2+4=(z^3-z^2-z-2)(z-2)$.

Целыми делителями свободного члена многочлена z^3-z^2-z-2 являются: ±1; ±2.

В результате проверки убеждаемся, что $z = 2$ является нулём многочлена $z^3 - z^2 - z - 2$ и, следовательно, многочлена $f(z)$. Значит, многочлен $f(z)$ делится на $(z-2)(z-2) = z^2 - 4z + 4$.

Выполним деление:

$$
\begin{array}{l|l}
z^4 - 3z^3 + z^2 + 4 & z^2 - 4z + 4 \\ \cline{2-2}
\underline{z^4 - 4z^3 + 4z^2} & z^2 + z + 1 \\
\quad z^3 - 3z^2 + 4 & \\
\quad \underline{z^3 - 4z^2 + 4z} & \\
\qquad z^2 - 4z + 4 & \\
\qquad \underline{z^2 - 4z + 4} &
\end{array}
$$

Таким образом, $f(z) = z^4 - 3z^3 + z^2 + 4 = (z^2 - 4z + 4)(z^2 + z + 1)$.

Нулями второго множителя являются:

$z^2 + z + 1 = 0$;

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3i^2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i; \qquad i^2 = -1$$

Итак, многочлен $f(z)$ имеет два целых равных нуля: $z_{1,2} = 2$.

б) $f(z) = z^4 - 3z^3 + z^2 + 4 = (z-2)^2(z^2 + z + 1)$ - разложение на множители с действительными коэффициентами .

в)

$$f(z) = z^4 - 3z^3 + z^2 + 4 = (z-2)^2(z^2 + z + 1) = (z-2)^2\left(z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(z + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

- разложение на множители с комплексными коэффициентами

г) Дробь $\dfrac{z^2 - 2z - 3}{z^4 - 3z^3 + z^2 + 4}$ является правильной, и может быть представлена в виде суммы простейших дробей

$$\frac{z^2-2z-3}{z^4-3z^3+z^2-4}=\frac{A}{z-2}+\frac{B}{(z-2)^2}+\frac{Cz+D}{z^2+z+1}.$$

Приведя правую часть последнего равенства к общему знаменателю, получим

$$\frac{z^2-2z-3}{z^4-3z^3+z^2+4}=\frac{A(z-2)(z^2+z+1)+B(z^2+z+1)+(Cz+D)(z-2)^2}{(z-2)^2(z^2+z+1)}$$

Из равенства дробей и знаменателей этих дробей следует равенство и числителей, то есть:

$$z^2-2z-3=A(z-2)(z^2+z+1)+B(z^2+z+1)+(Cz+D)(z-2)^2$$

Полагая $z=2$, получим

$$2^2-4-3=A\cdot 0+7B+(2C+D)\cdot 0;$$

$$-3=7B;$$

$$B=-\frac{3}{7}.$$

Полагая $z=0$, получим

$$-3=-2A-\frac{3}{7}+4D;\ -2A+4D=-\frac{18}{7}$$

Полагая $z=1$, получим

$$-4=-3A-\frac{9}{7}+C+D;\ \ -3A+C+D=-\frac{19}{7}$$

Полагая $z=-1$, получим

$$0=-3A-\frac{3}{7}+9(-C+D);\ \ 3A+9C-9D=-\frac{3}{7}.$$

Составим систему:

$$\begin{cases}-2A+4D=-\frac{18}{7};\\ -3A+C+D=-\frac{19}{7};\\ 3A+9C-9D=-\frac{3}{7}\end{cases}$$ Сложим второе и третье уравнения:

$$\begin{cases}-A+2D=-\frac{9}{7};\\ -3A+C+D=-\frac{19}{7};\\ 10C-8D=-\frac{22}{7}\end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 2D + \dfrac{9}{7}; \\ -3A + C + D = -\dfrac{19}{7}; \\ C = \dfrac{1}{10}(-\dfrac{22}{7} + 8D) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 2D + \dfrac{9}{7}; \\ -3(2D + \dfrac{9}{7}) + \dfrac{1}{10}(-\dfrac{22}{7} + 8D) + D = -\dfrac{19}{7}; \\ C = \dfrac{1}{10}(-\dfrac{22}{7} + 8D) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \dfrac{29}{49}; \\ D = -\dfrac{17}{49}; \\ C = -\dfrac{29}{49}. \end{cases}$$

Таким образом, $\dfrac{z^2 - 2z - 3}{z^4 - 3z^3 + z^2 - 4} = \dfrac{\frac{29}{49}}{z-2} + \dfrac{-\frac{3}{7}}{(z-2)^2} + \dfrac{-\frac{29}{49}z - \frac{17}{49}}{z^2 + z + 1}$.

Ответ.

а) 2;

б) $f(z) = z^4 - 3z^3 + z^2 + 4 = (z-2)^2(z^2 + z + 1)$;

в) $f(z) = (z-2)^2(z + \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i)(z + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i)$;

г) $\dfrac{z^2 - 2z - 3}{z^4 - 3z^3 + z^2 - 4} = \dfrac{\frac{29}{49}}{z-2} + \dfrac{-\frac{3}{7}}{(z-2)^2} + \dfrac{-\frac{29}{49}z - \frac{17}{49}}{z^2 + z + 1}$.