## Тема: Линейные пространства

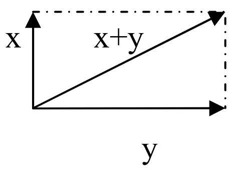
ЗАДАНИЕ. Для каждого из следующих множеств геометрических векторов определить, будет ли это множество линейным подпространством пространства $V_3$:

1) радиус-векторы точек данной плоскости;
2) векторы, образующие с данным ненулевым вектором $\bar{a}$ угол $\alpha$;
3) множество векторов, удовлетворяющих условию $|\bar{x}| = 1$.

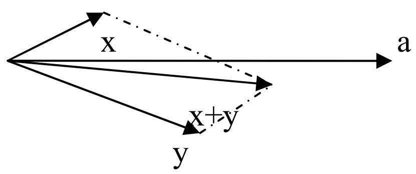
РЕШЕНИЕ. По определению подмножество $M$ элементов линейного пространства $L$ называется подпространством пространства $L$, если выполнены два условия:
1) $\forall x,\ y \in M\ (x+y)\ \in\ M$
2) $\forall x \in M, \forall \alpha \in R\ \alpha x \in M$.

Проверим выполнение этих условий в каждом случае.

1. Множество радиус-векторов точек плоскости (то есть векторов с началом в начале координат и концом в искомой точке) является линейным подпространством пространства $V_3$, так как выполнены оба условия определения. Действительно, сумма двух векторов с началом в начале координат есть вектор с началом в начале координат, то есть радиус-вектор некоторой точки (правило параллелограмма сложения векторов, см. рисунок). Произведение вектора на число дает вектор с началом в той же точке, но растянутый/сжатый в некоторое число раз, то есть тоже радиус-вектор некоторой точки.




2. Множество векторов, образующих с данным ненулевым вектором $\bar{a}$ угол $\alpha$ не является линейным подпространством пространства $V_3$, так как не выполнено первое условие определения. Действительно, можно найти такие два вектора x и y, образующие с данным ненулевым вектором $\bar{a}$ угол $\alpha$, что их сумма (x+y) не будет образовывать с вектором $\bar{a}$ угол $\alpha$ (см. рисунок).




3. Множество векторов, удовлетворяющих условию $|\bar{x}| = 1$ не является линейным подпространством пространства $V_3$, так как не выполнено второе условие определения. Действительно, если умножить любой вектор, такой что $|\bar{x}| = 1$ на любое число $\alpha \neq 0{,}1$, то получим новый вектор, длина которого $|\alpha \bar{x}| = |\alpha| \neq 1$.