

Тема: Операционное исчисление

ЗАДАНИЕ. Найти оригинал изображения $F(p)$, где

$$F(p) = \frac{2p-1}{(p^2-4p+13)^2}$$

РЕШЕНИЕ:

Преобразуем:

$$F(p) = \frac{2p-1}{(p^2-4p+13)^2} = \frac{2p-1}{(p^2-4p+4+9)^2} = \frac{2(p-2)+4-1}{((p-2)^2+3^2)^2} = \frac{2(p-2)+3}{((p-2)^2+3^2)^2} =$$

Временно заменим $q = p-2$

$$\begin{aligned} &= \frac{2q+3}{(q^2+3^2)^2} = \frac{1}{6} \frac{12q+18}{(q^2+3^2)^2} = \frac{1}{6} \frac{12q+9+9+q^2-q^2}{(q^2+3^2)^2} = \frac{1}{6} \frac{12q+9-q^2}{(q^2+3^2)^2} + \frac{1}{6} \frac{9+q^2}{(q^2+3^2)^2} = \\ &= \frac{1}{6} \frac{12q}{(q^2+3^2)^2} - \frac{1}{6} \frac{q^2-9}{(q^2+3^2)^2} + \frac{1}{6} \frac{1}{(q^2+3^2)} = \frac{1}{3} \frac{2 \cdot 3 \cdot q}{(q^2+3^2)^2} - \frac{1}{6} \frac{q^2-3^2}{(q^2+3^2)^2} + \frac{1}{18} \frac{3}{(q^2+3^2)} \end{aligned}$$

То есть

$$F(p) = \frac{1}{3} \frac{2 \cdot 3 \cdot (p-2)}{((p-2)^2+3^2)^2} - \frac{1}{6} \frac{(p-2)^2-3^2}{((p-2)^2+3^2)^2} + \frac{1}{18} \frac{3}{((p-2)^2+3^2)}$$

Используя формулы преобразований для элементарных функций и теорему смещения, получаем:

$$f(t) = \frac{1}{3} e^{2t} t \sin 3t - \frac{1}{6} e^{2t} t \cos 3t + \frac{1}{18} e^{2t} \sin 3t.$$