Тема: Полное исследование функции

Задание. *Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить график.*

$$y=\frac{x^3}{x^2-1}$$

Решение:

1) Область определения функции $x\neq\pm1$, то есть $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$. Точки разрыва $x=1$ и $x=-1$. Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{-1}{+0}=-\infty,\ \lim_{x\to-1+0}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{-1}{-0}=+\infty\ ,$$

$$\lim_{x\to1-0}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{1}{-0}=-\infty,\ \lim_{x\to1+0}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{1}{+0}=+\infty\ .$$

Получаем, что $x=1$ и $x=-1$ - вертикальные асимптоты.

2) Точки пересечения с осями координат:

Ox: $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}=0$, $x=0$, точка (0,0).

Oy: $x=0$, $\Rightarrow y=0$, точка (0,0).

3) Функция нечетная, так как

$$y(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-1}=-\frac{x^3}{x^2-1}=-y(x)$$

График симметричен относительно начала координат.

4) Экстремумы и монотонность. Вычисляем первую производную:

$$y'(x)=\left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)'=\frac{3x^2\left(x^2-1\right)-x^3\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}=$$

$$=\frac{x^2(x^2-3)}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{\left(x-1\right)^2\left(x+1\right)^2}.$$

Находим критические точки: $x=\pm\sqrt{3},\ x=0,\ x=\pm1$. Исследуем знак производной на интервалах, на которые критическая точка делит область определения функции.

y'	+		−		−		−		−		+
y	↗	$-\sqrt{3}$	↘	-1	↘	0	↘	1	↘	$\sqrt{3}$	↗

Функция возрастает на интервалах $(-\infty;-\sqrt{3}),\ (\sqrt{3};+\infty)$, убывает на интервалах $\left(-\sqrt{3};-1\right),\ (-1;0),\ (0;1),\ \left(1;\sqrt{3}\right)$. Функция имеет минимум при $x=\sqrt{3}\approx1,73$,

$y(\sqrt{3})=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=2,6$. Функция имеет максимум при $x=-\sqrt{3}\approx -1,73$,

$y(-\sqrt{3})=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=-2,6$.

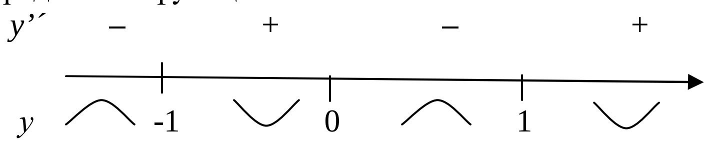
5) Выпуклость и точки перегиба. Вычисляем вторую производную.

$$y''(x)=\left(\frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}\right)'=\frac{\left(4x^3-6x\right)\left(x^2-1\right)^2-\left(x^4-3x^2\right)2x2\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)^4}=$$

$$=x\frac{\left(4x^2-6\right)\left(x^2-1\right)-4\left(x^4-3x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^3}=x\frac{4x^4-6x^2-4x^2+6-4x^4+12x^2}{\left(x^2-1\right)^3}=,$$

$$=x\frac{6+2x^2}{\left(x^2-1\right)^3}.$$

Приравниваем к нулю и находим критические точки: $x=0,\ x=1,\ x=-1$.
Исследуем знак производной на интервалах, на которые критические точки делят области определения функции.



Функция выпукла вверх на интервалах $(-\infty;-1)$, $(0;1)$, выпукла вниз на интервалах $(-1;0)$, $(1;+\infty)$. Точка перегиба: $x=0$, $f(0)=0$.

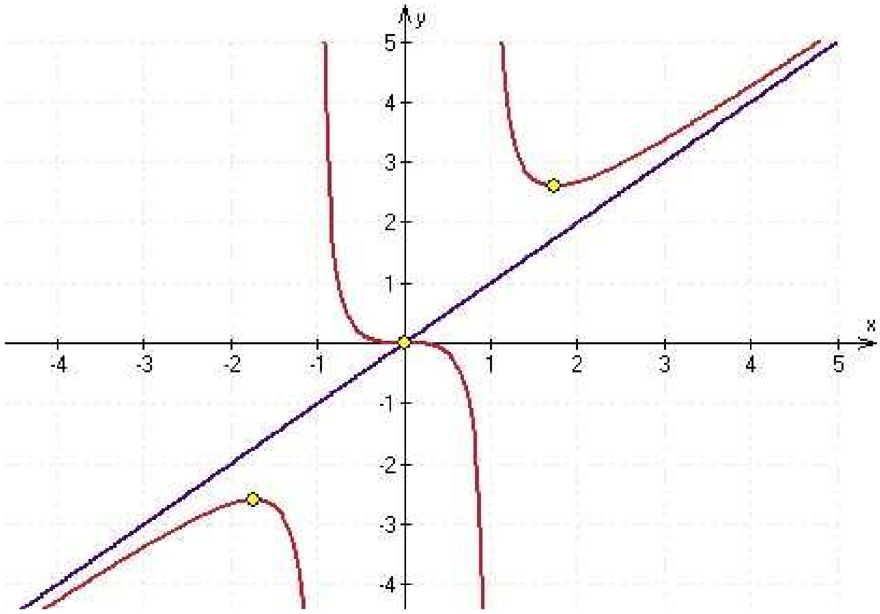
6) Наклонные асимптоты вида $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-1/x^2}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{(x^2-1)}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+x}{(x^2-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(x^2-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(x-1/x)}=0.$$

Наклонная асимптота $y=x$.

7) Строим график функции и асимптоту, отмечая ключевые точки:


y
x
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5