Тема: Полное исследование графика функции

ЗАДАНИЕ. *Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить график.*

$$y=\frac{x^3-1}{4x^2}$$

РЕШЕНИЕ:

1) Область определения функции $x\neq 0$, то есть $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. Точка разрыва $x=0$. Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to\pm 0}\frac{x^3-1}{4x^2}=\frac{-1}{+0}=-\infty.$$

Получаем, что $x=0$ - вертикальная асимптота.

2) Точки пересечения с осями координат:

Ox: $y=\dfrac{x^3-1}{4x^2}=0$, $x=1$, точка (1,0).

Oy: $x=0\notin D(y)$.

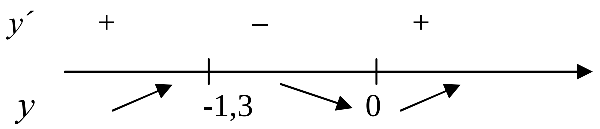
3) Функция общего вида, так как

$$y(-x)=\frac{(-x)^3-1}{4(-x)^2}=-\frac{x^3+1}{4x^2}\neq\pm y(x)$$

4) Экстремумы и монотонность. Вычисляем первую производную:

$$y'(x)=\left(\frac{x^3-1}{4x^2}\right)'=\frac{1}{4}\frac{3x^2\cdot x^2-(x^3-1)\cdot 2x}{x^4}=\frac{1}{4}\frac{3x^4-2x^4+2x}{x^4}=\frac{x^4+2x}{4x^4}=\frac{x^3+2}{4x^3}$$

Находим критические точки: $x_1=-\sqrt[3]{2}\approx-1,3$, $x_2=0$. Исследуем знак производной на интервалах, на которые критическая точка делит область определения функции.



Функция возрастает на интервалах $(-\infty;-1,3),(0;+\infty)$, убывает на интервале $(-1,3;0)$. В точке $x=-\sqrt[3]{2}\approx-1,3$ функция имеет максимум, $y(-1,3)\approx-0,47$..

5) Выпуклость и точки перегиба. Вычисляем вторую производную.

$$y''(x)=\left(\frac{x^3+2}{4x^3}\right)'=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2x^3}\right)'=-\frac{3}{2x^4}<0,$$ на каждом интервале области определения,

поэтому функция выпукла вверх на каждом интервале области определения, точек перегиба нет.

6) Наклонные асимптоты вида $y=kx+b$.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{4x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-1/x^3}{4} = \frac{1}{4},$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y-kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1}{4x^2} - \frac{1}{4}x\right) = \frac{1}{4}\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1-x^3}{x^2} = \frac{1}{4}\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x^2} = 0$$

Наклонная асимптота $y = \frac{1}{4}x$.

7) Строим график функции и асимптоту, отметим ключевые точки: