

## Тема: Полное исследование функции

ЗАДАНИЕ. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить график.

$$y = \ln \frac{x+1}{x+2}$$

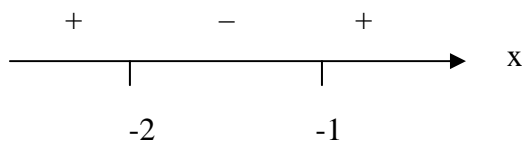
РЕШЕНИЕ:

1) Область определения функции

$$\frac{x+1}{x+2} > 0,$$

$$(x+1)(x+2) > 0,$$

$$x_1 = -1, x_2 = -2.$$



То есть  $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$ .

Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \ln \frac{x+1}{x+2} = \ln \left( \frac{-1}{-0} \right) = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \ln \frac{x+1}{x+2} = \ln \left( \frac{+0}{1} \right) = -\infty.$$

Получаем, что  $x = -1$  и  $x = -2$  - вертикальные асимптоты.

2) Точки пересечения с осями координат:

$$Ox: y = \ln \left( \frac{x+1}{x+2} \right) = 0, \Rightarrow \frac{x+1}{x+2} = 1, x+1 = x+2, \text{ нет решений.}$$

$$Oy: x = 0, \Rightarrow y = \ln \left( \frac{0+1}{0+2} \right) = -\ln 2 \approx -0,69. \text{ Точка } (0, -0,69).$$

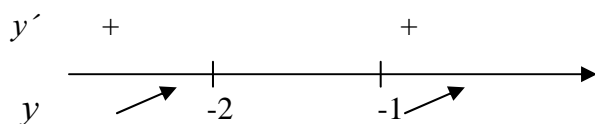
3) Функция общего вида, так как

$$y(-x) = \ln \frac{-x+1}{-x+2} = \ln \frac{x-1}{x-2} \neq \pm y(x)$$

4) Экстремумы и монотонность. Вычисляем первую производную:

$$y'(x) = \left( \ln \frac{x+1}{x+2} \right)' = \frac{x+2}{x+1} \left( \frac{x+1}{x+2} \right)' = \frac{x+2}{x+1} \frac{x+2 - (x+1)}{(x+2)^2} = \frac{1}{x+1} \frac{x+2-x-1}{x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

Находим критические точки:  $x_1 = -1, x_2 = -2$ . Исследуем знак производной на интервалах, на которые критическая точка делит область определения функции.

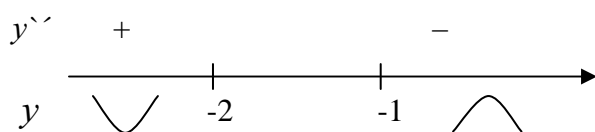


Функция возрастает на интервалах  $(-\infty; -2), (-1; +\infty)$ . Экстремумов нет.

5) Выпуклость и точки перегиба. Вычисляем вторую производную.

$$y''(x) = \left( \frac{1}{(x+1)(x+2)} \right)' = -\frac{x+1+x+2}{(x+1)^2(x+2)^2} = -\frac{2x+3}{(x+1)^2(x+2)^2}.$$

Находим критические точки:  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = -2$ ,  $x_3 = -1,5$ . Исследуем знак производной на интервалах, на которые критическая точка делит область определения функции.



Функция выпукла вниз на  $(-\infty; -2)$ , выпукла вверх на  $(-1; +\infty)$ .

б) Горизонтальная асимптота:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x+1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{1+1/x}{1+2/x} = 0,$$

Асимптота  $y = 0$ .

7) Строим график функции, отметим ключевые точки:

