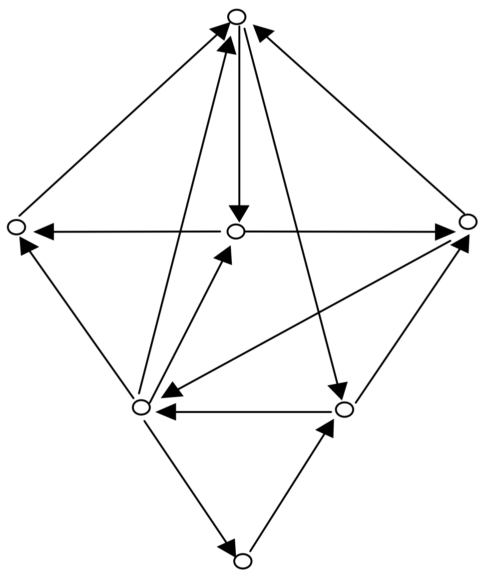
Задача по теории графов с решением
Характеристики графа

ЗАДАНИЕ.

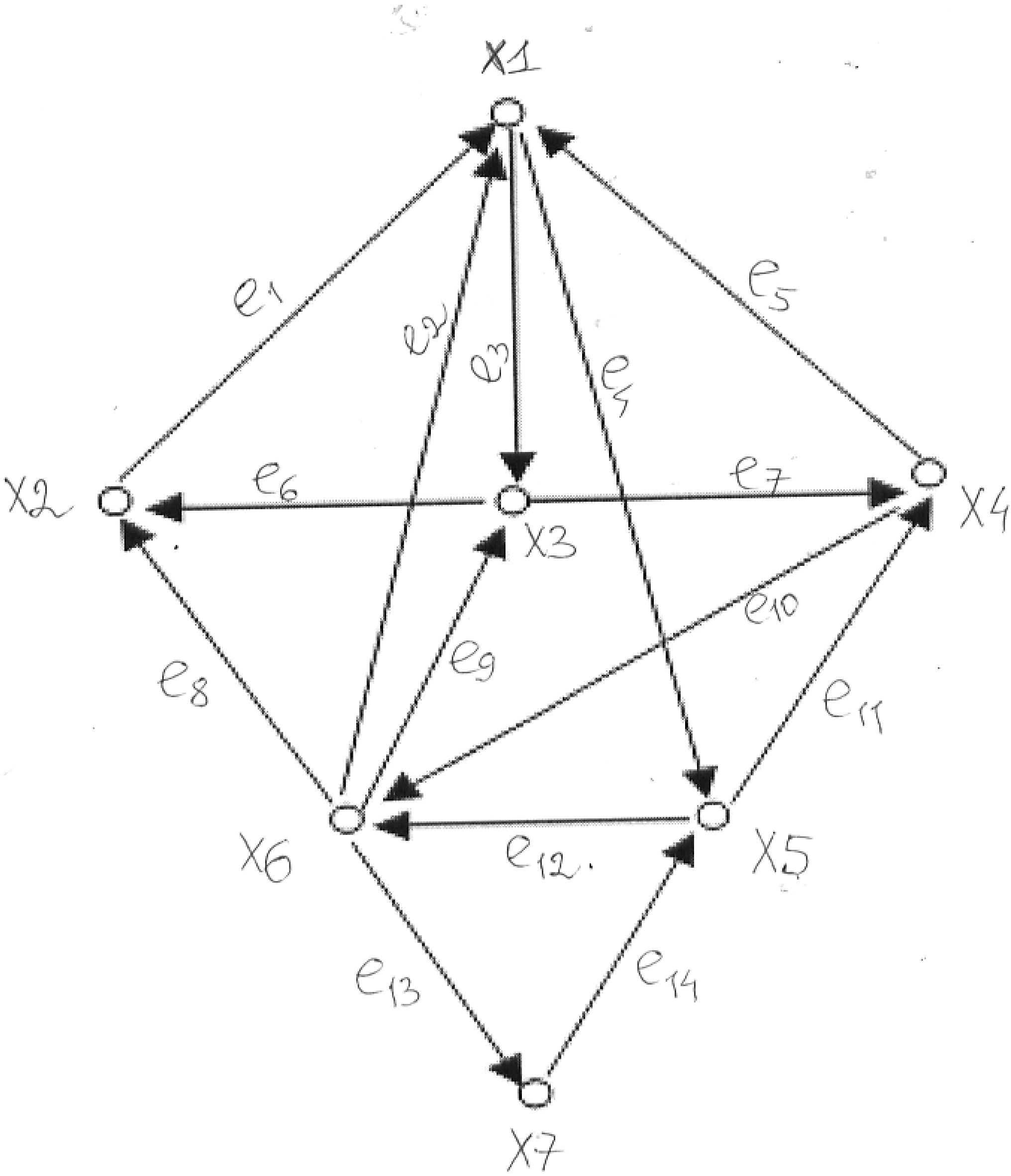
Считая данный граф неориентированным, обозначить его вершины и рёбра разными символами и определить.
3.1. Локальные степени и окружения каждой вершины в виде структуры смежности;
3.2. Построить матрицы инцидентности и смежности;
3.3. Рассмотреть части графа. Привести примеры суграфа, накрывающего суграфа. Показать подграф, состоящий из трёх вершин. Сколько таких подграфов можно найти в данном графе? Показать примеры пересечения и объединения частей графа;
3.4. Привести примеры циклического маршрута, цепи, простой цепи. Попытаться найти Эйлеров цикл;
3.5. Определить центр, диаметр и радиус графа.

Считая граф ориентированным, определить
3.6. Степени вершин
3.7. Матрицы инцидентности и смежности.
3.8. Привести примеры пути, ориентированной цепи, простой цепи, контура, цикла и простого цикла.



РЕШЕНИЕ.

Вводим обозначения:



Часть 1. Считаем граф неориентированным.

3.1. Найдем локальные степени и окружения каждой вершины в виде структуры смежности.

Вершина	Последователи	Степень
1	2,3,4,5,6	5
2	1,3,6	3
3	1,2,4,5	4
4	1,3,5,6	4
5	1,4,6,7	4
6	1,2,3,4,5,7	6
7	5,6	2

3.2. Построим матрицы инцидентности и смежности.

Строим матрицу инцидентности. Элемент матрицы $b_{ij} = 1$, если вершина x_i инцидентна ребру e_j, в противном случае равен 0. Получаем:

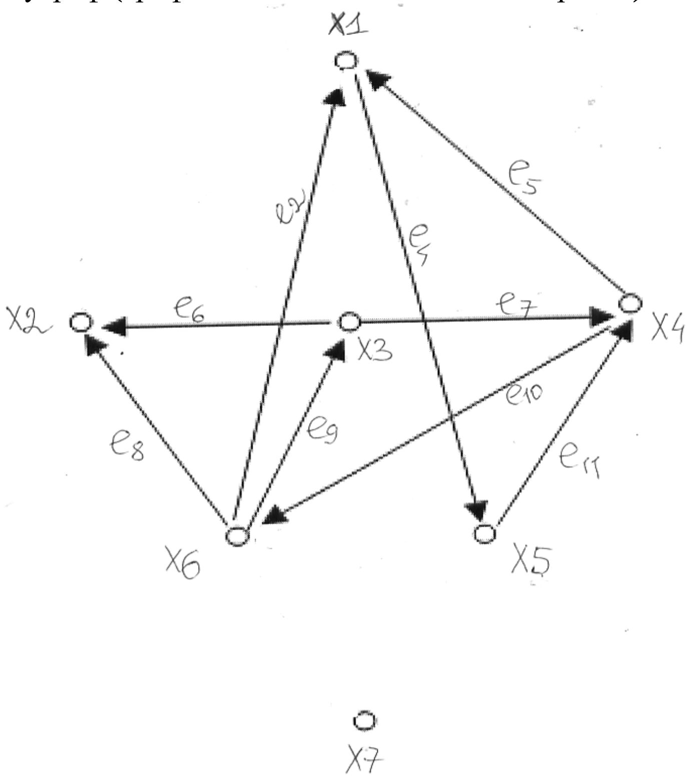
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1
6	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Строим матрицу смежности для этого графа. Элемент матрицы a_{ij} равен 1, если вершины x_i и x_j смежны, в противном случае равен 0. Получаем:

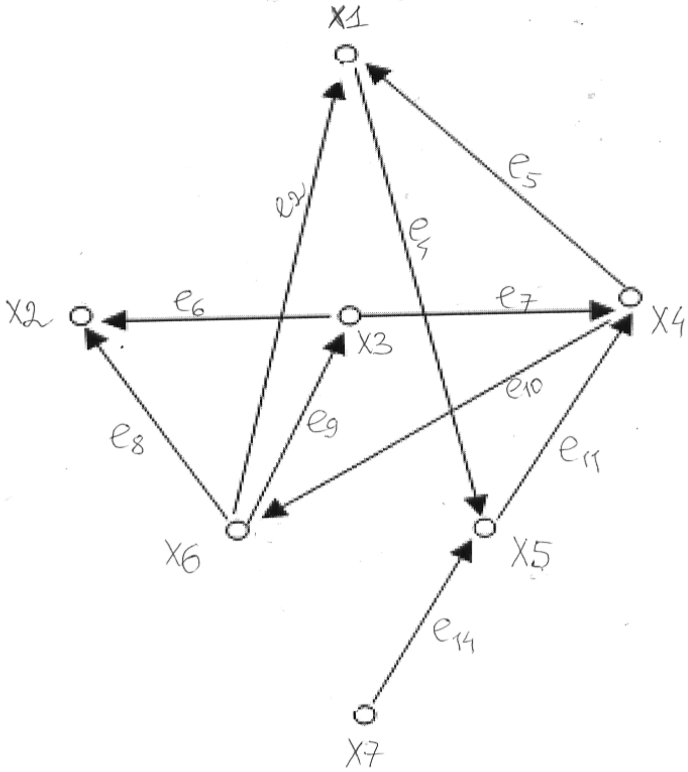
	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	1	1	1	0
2	1	0	1	0	0	1	0
3	1	1	0	1	0	1	0
4	1	0	1	0	1	1	0
5	1	0	0	1	0	1	1
6	1	1	1	1	1	0	1
7	0	0	0	0	1	1	0

3.3. Рассмотрим части графа.

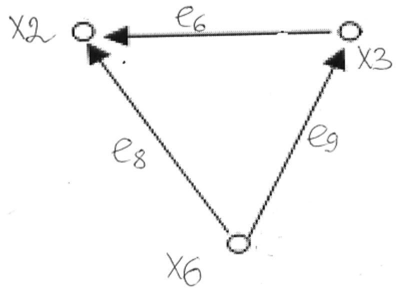
Суграф (граф с таким же множеством вершин):



Накрывающий суграф (без изолированных вершин):

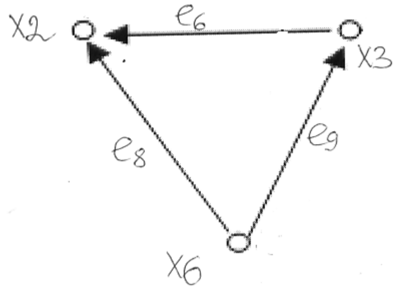


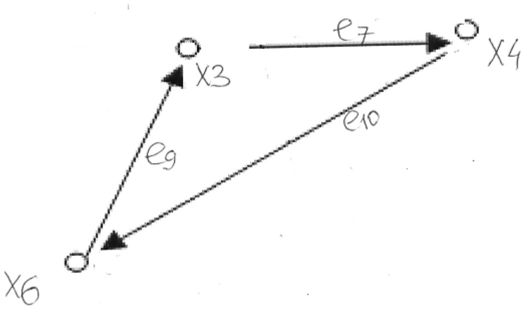
Подграф, состоящий из трёх вершин.



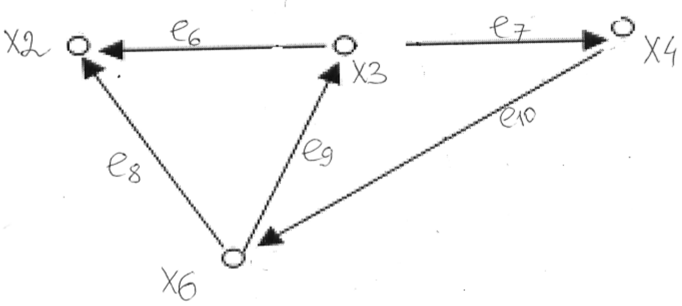
Подграфов из трех вершин в графе, состоящем из 7 вершин, будет $C_7^3 = \dfrac{7!}{3!4!} = \dfrac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$ подграфов.

Покажем примеры пересечения и объединения частей графа.
Пусть даны две части графа:

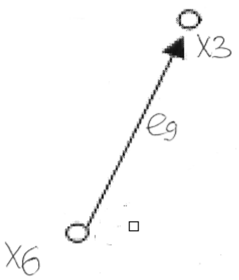




Тогда их объединение:



Их пересечение:



3.4. Приведем примеры
циклического маршрута: $x_2 - e_6 - x_3 - e_9 - x_6 - e_8 - x_2$
цепи: $x_1 - e_1 - x_2 - e_8 - x_6 - e_2 - x_1 - e_5 - x_4$
простой цепи: $x_1 - e_1 - x_2 - e_8 - x_6 - e_{13} - x_7$

Найдем Эйлеров цикл (содержащий все ребра графа по одному разу). Известно, что граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степень каждой из его вершин – четное число. Степени вершин были найдены выше, они не все четные, поэтому эйлеров цикл не существует.

3.5. Определим центр, диаметр и радиус графа.

Построим матрицу расстояний для графа.

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	1	1	1	2
2	1	0	1	2	2	1	2

3	1	1	0	1	2	1	2
4	1	2	1	0	1	1	2
5	1	2	2	1	0	1	1
6	1	1	1	1	1	0	1
7	2	2	2	2	1	1	0

Построим вектор удаленностей (эксцентриситетов вершин) (максимальное число в каждой строке) d = (2, 2, 2, 2, 2, 1, 2).

Диаметр графа равен 2.

Радиус графа равен 1.

Центральная вершина x_6 образует центр графа. Остальные вершины периферийные.

Часть 2. Считаем граф ориентированным.

3.6. Найдем степени вершин, результаты занесем в таблицу:

Вершина	Полустепень		Степень
	захода	исхода	
1	3	2	5
2	2	1	3
3	2	2	4
4	2	2	4
5	2	2	4
6	2	4	6
7	1	1	2
	14	14	

3.7. Построим матрицы инцидентности и смежности.

Строим матрицу инцидентности. Элемент матрицы $b_{ij} = 1$, если из вершины x_i исходит дуга e_j, $b_{ij} = -1$, если в вершину x_i входит дуга e_j, в противном случае равен 0.
Получаем:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	-1	-1	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0
3	0	0	-1	0	0	1	1	0	-1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	1	-1	0	0	0
5	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	-1
6	0	1	0	0	0	0	0	1	1	-1	0	-1	1	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1

Строим матрицу смежности для этого графа. Элемент матрицы a_{ij} равен 1, если из вершины x_i в вершину x_j ведет дуга, в противном случае равен 0. Получаем:

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	1	0	1	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	1	0	0	0
4	1	0	0	0	0	1	0
5	0	0	0	1	0	1	0
6	1	1	1	0	0	0	1
7	0	0	0	0	1	0	0

3.8. Приведем примеры

Пути $x_1 - e_4 - x_5 - e_{11} - x_4 - e_{10} - x_6 - e_9 - x_3 - e_7 - x_4$

ориентированной цепи $x_1 - e_4 - x_5 - e_{11} - x_4 - e_{10} - x_6$

простой цепи $x_1 - e_4 - x_5 - e_{11} - x_4$

контура $x_2 - e_1 - x_1 - e_3 - x_3 - e_7 - x_4 - e_{10} - x_6 - e_8 - x_2$

цикла $x_2 - e_1 - x_1 - e_3 - x_3 - e_6 - x_2$

простого цикла $x_2 - e_1 - x_1 - e_3 - x_3 - e_6 - x_2$.