Аналитическая геометрия на плоскости
Пример решения задачи

Задача. *Даны три точки* $M_1(-1;5)$, $M_2(2;1)$, $M_3(4;11)$.

2.1 Составить уравнения прямых

А) перпендикулярной; Б) параллельной прямой M_1M_2 *и проходящей через точку* M_3, *используя:*

1) уравнение прямой, проходящей через точку с заданным нормальным вектором;

2) уравнение прямой, проходящей через точку с заданным направляющим вектором;

3) уравнение прямой, проходящей через точку с заданным угловым коэффициентом.

2.2 На отрезке M_1M_2 *найти координаты точки* M_4, *находящейся к точке* M_1 *в два раза ближе, чем к точке* M_2.

Решение.

Найдем координаты вектора $\bar{a} = \overline{M_1M_2} = \{2+1;1-5\} = \{3;-4\}$.Найдем координаты перпендикулярного вектора $\bar{b} = \{4;3\}$. Найдем уравнение прямой M_1M_2:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

$$\frac{x+1}{2+1} = \frac{y-5}{1-5},$$

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-5}{-4}.$$

$$-4x-4 = 3y-15,$$
$$3y = -4x+11,$$
$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{11}{3}.$$

Угловой коэффициент равен $\hat{k} = -4/3$.

Составим уравнения прямой, перпендикулярной прямой M_1M_2 и проходящей через точку M_3, используя:

1) уравнение прямой, проходящей через точку с заданным нормальным вектором.

Формула:

$n_1(x - x_3) + n_2(y - y_3) = 0$, здесь нормальный вектор $\overline{n} = \overline{a} = \{3; -4\}$. Получаем:

$$3(x-4) - 4(y-11) = 0,$$
$$3x - 12 - 4y + 44 = 0,$$
$$3x - 4y + 32 = 0.$$

2) уравнение прямой, проходящей через точку с заданным направляющим вектором.

Формула:

$\frac{(x - x_3)}{m_1} = \frac{(y - y_3)}{m_2}$, здесь направляющий вектор (перпендикулярный M_1M_2) $\overline{m} = \overline{b} = \{4; 3\}$. Получаем:

$$\frac{(x-4)}{4} = \frac{(y-11)}{3},$$
$$3x - 12 = 4y - 44,$$
$$3x - 4y + 32 = 0.$$

3) уравнение прямой, проходящей через точку с заданным угловым коэффициентом.

Формула:

$(y - y_3) = k(x - x_3)$, здесь $k = -1/\hat{k} = \frac{3}{4}$. Получаем:

$$(y-11) = \frac{3}{4}(x-4),$$

$$4y-44=3x-12,$$
$$3x-4y+32=0.$$

Составим уравнения прямой, параллельной прямой M_1M_2 и проходящей через точку M_3, используя:

1) уравнение прямой, проходящей через точку с заданным нормальным вектором.

Формула:

$n_1(x-x_3)+n_2(y-y_3)=0$, здесь нормальный вектор $\overline{n}=\overline{b}=\{4;3\}$. Получаем:

$$4(x-4)+3(y-11)=0,$$
$$4x-16+3y-33=0,$$
$$4x+3y-49=0.$$

2) уравнение прямой, проходящей через точку с заданным направляющим вектором.

Формула:

$\frac{(x-x_3)}{m_1}=\frac{(y-y_3)}{m_2}$, здесь направляющий вектор (параллельный M_1M_2)

$\overline{m}=\overline{a}=\{3;-4\}$. Получаем:

$$\frac{(x-4)}{3}=\frac{(y-11)}{-4},$$
$$-4x+16=3y-33,$$
$$3y+4x-49=0.$$

3) уравнение прямой, проходящей через точку с заданным угловым коэффициентом.

Формула:

$(y-y_3)=k(x-x_3)$, здесь $k=\hat{k}=-\frac{4}{3}$. Получаем:

$(y-11)=-\frac{4}{3}(x-4)$,

$3y-33=-4x+16,$
$3y+4x-49=0.$

2.2 На отрезке M_1M_2 найдем координаты точки M_4, находящейся к точке M_1 в два раза ближе, чем к точке M_2. То есть, точка M_4 делит отрезок M_1M_2 в соотношении $\lambda=1/2$, поэтому ее координаты равны:

$$x_4=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{-1+2\cdot 1/2}{1+1/2}=\frac{0}{3/2}=0,$$

$$y_4=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{5+1\cdot 1/2}{1+1/2}=\frac{11/2}{3/2}=\frac{11}{3}.$$

Получили координаты $M_4(1;11/3)$.

.

Сделаем чертеж