Функции нескольких переменных
Частные производные

ЗАДАНИЕ.

Найти производные сложной функции:

$z = u^2 \cdot \ln v$, $u = \dfrac{x}{y}$, $v = x^2 + y^2$.

РЕШЕНИЕ.

Сначала найдем следующие производные:

$z_u' = 2u \ln v$, $z_v' = \dfrac{u^2}{v}$, $u_x' = \dfrac{1}{y}$, $u_y' = -\dfrac{x}{y^2}$, $v_x' = 2x$, $v_y' = 2y$.

Тогда

$$z_x' = z_u' u_x' + z_v' v_x' = 2u \ln v \frac{1}{y} + \frac{u^2}{v} 2x = 2\frac{x}{y} \ln\left(x^2 + y^2\right) \frac{1}{y} + \frac{(x/y)^2}{x^2 + y^2} 2x =$$

$$= 2\frac{x}{y^2} \ln\left(x^2 + y^2\right) + \frac{2x^3}{y^2\left(x^2 + y^2\right)}.$$

$$z_y' = z_u' u_y' + z_v' v_y' = 2u \ln v \left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{u^2}{v} 2y = 2\frac{x}{y} \ln\left(x^2 + y^2\right)\left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{(x/y)^2}{x^2 + y^2} 2y =$$

$$= -\frac{2x^2}{y^3} \ln\left(x^2 + y^2\right) + \frac{2x^2}{y\left(x^2 + y^2\right)}.$$