

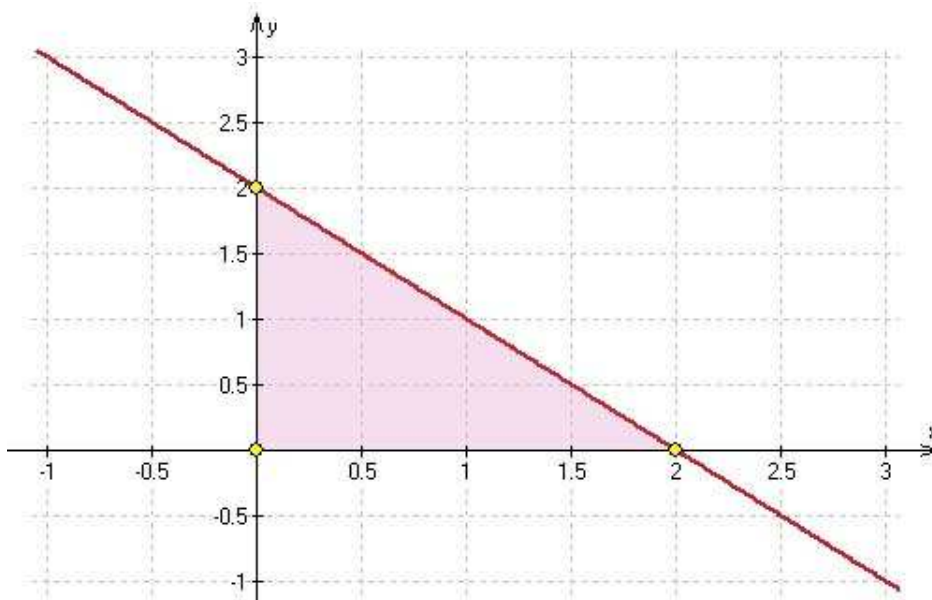
Функции нескольких переменных Наибольшее и наименьшее значение в области

ЗАДАНИЕ.

Экстремумы функций нескольких переменных. Требуется найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y)$ в области, ограниченной заданными линиями.

$$z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 2.$$

РЕШЕНИЕ. Сделаем чертеж области:



Шаг 1. Найдем стационарные точки внутри области.

Вычислим частные производные и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} z'_x = (5x^2 - 3xy + y^2 + 4)'_x = 10x - 3y = 0, \\ z'_y = (5x^2 - 3xy + y^2 + 4)'_y = -3x + 2y = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Точка $(0,0)$, $z(0,0) = 4$.

Шаг 2. Исследуем значения функции на границах области D

(I) $x = 0, y \in [0; 2]$.

Тогда $z = y^2 + 4, z' = 2y = 0, y = 0$

(II) $y = 0, x \in [0; 2]$.

Тогда $z = 5x^2 + 4, z' = 10x = 0, x = 0,$

(IV) $y = 2 - x, x \in [0; 2]$.

Тогда $z = 5x^2 - 3x(2 - x) + (2 - x)^2 + 4 = 5x^2 - 6x + 3x^2 + 4 - 4x + x^2 + 4 = 9x^2 - 10x + 8,$

$z' = 18x - 10 = 0, x = 5/9 \in [0; 2],$

$z(5/9) = 47/9 \approx 5,22$

Найдем значения функции в угловых точках:

$z(2; 0) = 24, z(0; 2) = 8.$

Шаг 3. Выбираем из всех полученных значений наибольшее и наименьшее:

$z_{\text{наим}} = z(0, 0) = 4$ и $z_{\text{наиб}} = z(2, 0) = 24.$