Функции нескольких переменных
Приближенные вычисления

Задание.

Дана функция $z = x^2 + 2xy + 3y^2$ *и две точки A (2; 1) и B (1,96; 1,04). Требуется:*

1) вычислить точное значение функции в точке B;

2) вычислить приближённое значение функции в точке B, исходя из значения функции в точке A и заменив приращение функции при переходе от точки A к точке B дифференциалом;

3) оценить в процентах относительную погрешность, получающуюся при замене приращения функции её дифференциалом.

Решение.

Вычислим значение z_1 функции в точке B:

$$z_1 = z(B) = z(1{,}96;\ 1{,}04) = 11{,}1632$$

Вычислим приближенное значение $\overline{z_1}$ функции в точке B, из значения z_0 функции в точке A, заменив приращение функции при переходе от точки A к точке B дифференциалом:

$$z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx z(x_0, y_0) + \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

Найдем сначала частные производные функции $z = x^2 + 2xy + 3y^2$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2 + 2xy + 3y^2\right)'_x = 2x + 2y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2 + 2xy + 3y^2\right)'_y = 2x + 6y.$$

Для значения функции в точке $B(1{,}96;1{,}04)$ получаем:

$$\overline{z_1} = z(2-0,04;1+0,04) \approx z(2,1) + \frac{\partial z(2;1)}{\partial x}(-0,04) + \frac{\partial z(2;1)}{\partial y}(0,04) =$$

Вычисляем:

$z(2;1) = 4+4+3 = 11$,

$\frac{\partial z}{\partial x}(2;1) = 4+2 = 6,$

$\frac{\partial z}{\partial y}(2;1) = 4+6 = 10.$

Подставляем и получаем:

$= 11 - 0,04 \cdot 6 + 0,04 \cdot 10 = 11,16.$

Относительная погрешность: $\delta = \frac{|11,1632 - 11,16|}{11,1632} \cdot 100\% \approx 0,029\%$.