

Функции нескольких переменных Экстремумы

ЗАДАНИЕ.

Найти точки локального экстремума и экстремальные значения.

$$z = x^2 + y^2 + x - xy + y.$$

РЕШЕНИЕ.

Найдем стационарные точки функции. Вычислим частные производные и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} z'_x = 2x + 1 - y = 0, \\ z'_y = 2y - x + 1 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = -1, \\ -x + 2y = -1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = -1, \\ -2x + 4y = -2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = -1, \\ 3y = -3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1, \\ y = -1. \end{cases}$$

Получили стационарную точку $M(-1; -1)$. Исследуем ее на экстремум.

Найдем определитель вторых производных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0.$$

В точке $M(-1; -1)$ экстремум есть, причем это минимум, так как $z''_{xx} = 2 > 0$.

Таким образом, $z_{\min} = z(-1; -1) = 1 + 1 - 1 - 1 - 1 = -1$.