# Теория поля
## Циркуляция векторного поля

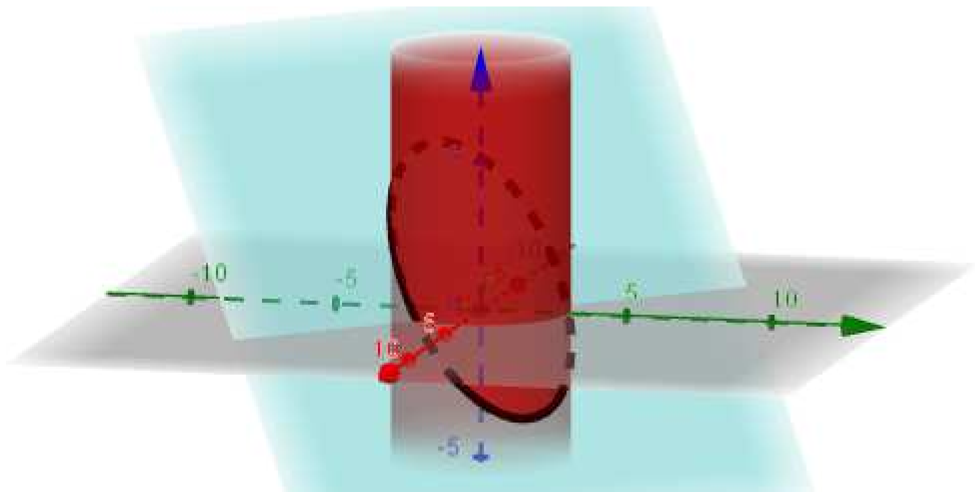
Задание.

*Найти модуль циркуляции векторного поля* $\bar{a} = xy\bar{i} + yz\bar{j} + xz\bar{k}$ *вдоль контура*

$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

Решение.

Изобразим заданный контур:




В качестве поверхности $S$, натянутой на контур, выберем часть плоскости $x + y + z = 1$, заключенную внутри контура.

Единичная нормаль к поверхности $S$:

$$\bar{n} = \frac{(1;1;1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Найдем ротор поля:

$$\operatorname{rot}\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz & xz \end{vmatrix} = \bar{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}xz - \frac{\partial}{\partial z}yz\right) - \bar{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}xz - \frac{\partial}{\partial z}xy\right) + \bar{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}yz - \frac{\partial}{\partial y}xy\right) =$$

$$= -y\bar{i} - z\bar{j} - x\bar{k}$$

Скалярное произведение:

$\operatorname{rot}\bar{a}\cdot\bar{n} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z)$

По формуле Стокса:

$C = \iint_S \operatorname{rot}\bar{a}\cdot\bar{n}ds = -\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_S (x+y+z)ds$

Переходим от поверхностного интеграла к двойному, проецируя поверхность $S$ на плоскость $Oxy$ :

$D\colon\ x^2+y^2 \le 9$

$z = 1-x-y;\ \ ds = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \frac{dxdy}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}dxdy$

Получим:

$C = -\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_S (x+y+z)ds = -\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{x^2+y^2\le 9}(x+y+1-x-y)\sqrt{3}dxdy = -\iint_{x^2+y^2\le 9}dxdy$

Полученный интеграл равен площади круга $x^2+y^2 \le 9$ , радиус этого круга равен 3, его площадь $\pi\cdot 3^2 = 9\pi$ .

Итак, $|C| = 9\pi$ .

ОТВЕТ. $|C| = 9\pi$