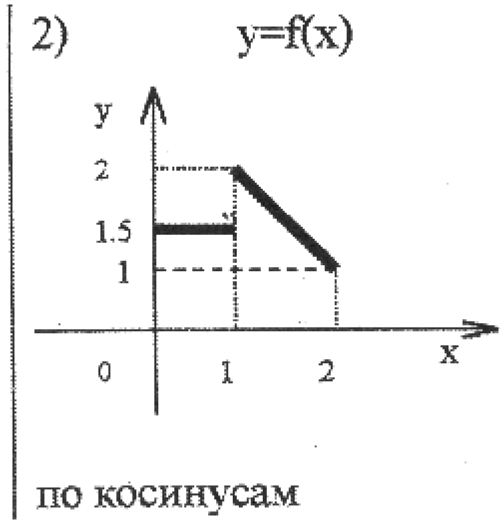
Задание. *Разложить в ряд Фурье по косинусам или по синусам функцию* $y = f(x)$, *определенную на заданном интервале с помощью графика или в явном виде. Построить график суммы полученного ряда Фурье и записать четыре первых ненулевых члена этого ряда.*



Решение. Сначала запишем аналитическое выражение для функции, заданной графиком на интервале $(0,2)$.

$$f(x) = \begin{cases} 1{,}5, \ x \in (0,1) \\ 3 - x, \ x \in (1,2) \end{cases}$$

Разложение функции в ряд Фурье по косинусам на интервале $[-2,2]$ имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{2}.$$

Определим коэффициенты этого ряда.

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 1{,}5dx + \int_1^2 (3-x)\,dx = 1{,}5x\Big|_0^1 + \left(3x - \frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= 1{,}5 + \left(6 - \frac{1}{2}4\right) - \left(3 - \frac{1}{2}\right) = 1{,}5 + 4 - 2{,}5 = 3.$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi n x}{2}dx = \int_0^1 1{,}5\cos\frac{\pi n x}{2}dx + \int_1^2 (3-x)\cos\frac{\pi n x}{2}dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = 3 - x & du = -dx \\ dv = \cos\dfrac{\pi n x}{2}dx & v = \dfrac{2}{\pi n}\sin\dfrac{\pi n x}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$=\frac{2\cdot 1,5}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^1+\frac{2(3-x)}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_1^2+\frac{2}{\pi n}\int_1^2\sin\frac{\pi nx}{2}dx=$$

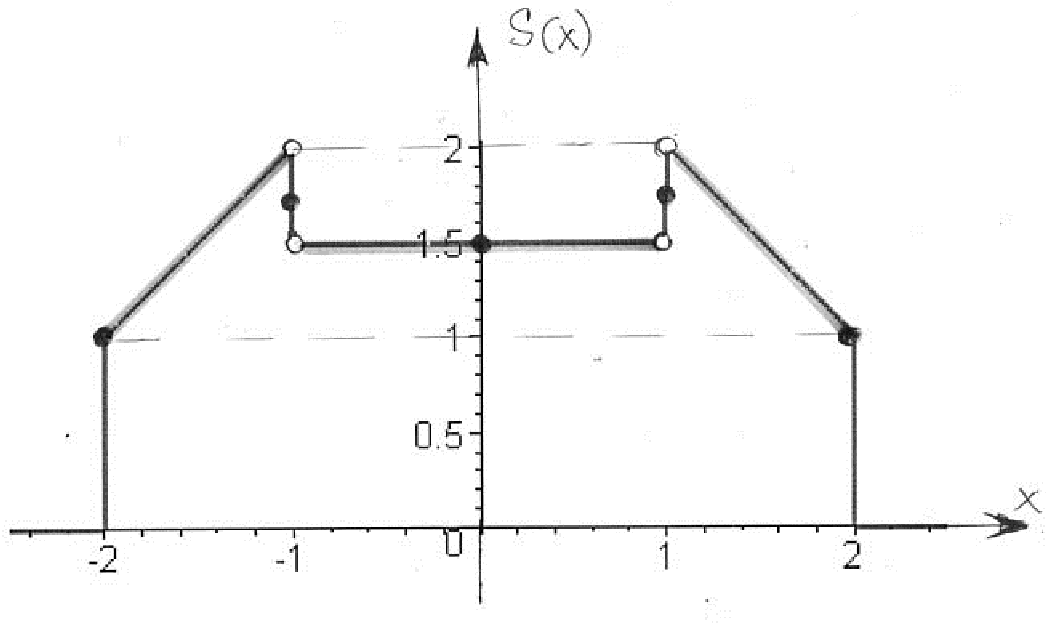
$$=\frac{2\cdot 1,5}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}-\frac{2(3-1)}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}-\frac{2^2}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_1^2=-\frac{1}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}-\frac{2^2}{\pi^2 n^2}\left(\cos\pi n-\cos\frac{\pi n}{2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}-\frac{2^2}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n-\cos\frac{\pi n}{2}\right)=-\frac{\pi n\sin\frac{\pi n}{2}+4(-1)^n-4\cos\frac{\pi n}{2}}{\pi^2 n^2}.$$

Получили разложение:

$$f(x)=\frac{3}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n\sin\frac{\pi n}{2}+4(-1)^n-4\cos\frac{\pi n}{2}}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi nx}{2}.$$

Построим график суммы полученного ряда Фурье.



Запишем четыре первых ненулевых члена этого ряда:

$$f(x)=\frac{3}{2}-\frac{\pi\sin\frac{\pi}{2}+4(-1)^{1}-4\cos\frac{\pi}{2}}{\pi^{2}1^{2}}\cos\frac{\pi x}{2}-\frac{2\pi\sin\frac{\pi 2}{2}+4(-1)^{2}-4\cos\frac{\pi 2}{2}}{\pi^{2}2^{2}}\cos\frac{\pi 2x}{2}-$$

$$-\frac{3\pi\sin\frac{\pi 3}{2}+4(-1)^{3}-4\cos\frac{\pi 3}{2}}{\pi^{2}3^{2}}\cos\frac{\pi 3x}{2}+\ldots=$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{\pi-4}{\pi^{2}}\cos\frac{\pi x}{2}-\frac{4+4}{\pi^{2}4}\cos\pi x-\frac{-3\pi-4}{\pi^{2}9}\cos\frac{3\pi x}{2}+\ldots=$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{\pi-4}{\pi^{2}}\cos\frac{\pi x}{2}-\frac{2}{\pi^{2}}\cos\pi x+\frac{3\pi+4}{9\pi^{2}}\cos\frac{3\pi x}{2}+\ldots$$

Сделаем схематический чертеж. Красным изображен график исходной функции, зеленым – график приближения первыми четырьмя членами разложения. Чем больше будет взято членов ряда, тем ближе будет зеленая линия к красной.