Тема: Дифференциальные уравнения

Задание. *Решить уравнение* $(2x+y+1)\,dx+(x+2y-1)\,dy=0$.

Решение. Разрешаем уравнение относительно производной:

$$y'=-\frac{2x+y+1}{x+2y-1}.$$

Это уравнение сводится к однородному уравнению заменой $x=x_0+t$, $y=y_0+z$, где (x_0,y_0) — решение системы уравнений

$$\begin{cases}2x_0+y_0+1=0,\\ x_0+2y_0-1=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}x_0=-1,\\ y_0=1,\end{cases}$$

Делаем замену $x=t-1$, $y=z+1$, $y'=z'$ получаем

$$z'=-\frac{2t-2+z+1+1}{t-1+2z+2-1},\quad z'=-\frac{2t+z}{t+2z}.$$

Получили однородное уравнение. Делаем замену $z=ut$, $u=u(t)$, $z'=u't+u$, подставляем

$$u't+u=-\frac{2t+ut}{t+2ut},\quad u't=-\frac{2+u}{1+2u}-u,\quad u't=-2\frac{u^2+u+1}{1+2u}.$$

Разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{1+2u}{u^2+u+1}\,du=-2\frac{dt}{t},\quad \int\frac{1+2u}{u^2+u+1}\,du=-2\int\frac{dt}{t},\quad \int\frac{d(u^2+u+1)}{u^2+u+1}\,du=-2\int\frac{dt}{t},$$

$$\ln|u^2+u+1|=-2\ln|t|+\ln|C|,\quad u^2+u+1=\frac{C}{t^2}\ (C\neq 0).$$

Возвращаемся к исходным переменным

$$\frac{z^2}{t^2}+\frac{z}{t}+1=\frac{C}{t^2},\quad z^2+tz+t^2=C,$$

$$(y-1)^2+(x+1)(y-1)+(x+1)^2=C,\quad y^2+x^2+xy+x-y+1=C.$$

Общий интеграл уравнения $y^2+x^2+xy+x-y+1=C$.