

Задача с решением по численным методам
Тема: метод Ньютона поиска корней уравнения

ЗАДАНИЕ.

На отрезке $[0;2]$ методом Ньютона найти корень уравнения $-x^3 - 2x^2 - 4x + 10 = 0$ с точностью $0,01$.

РЕШЕНИЕ.

Отделим корни графически:

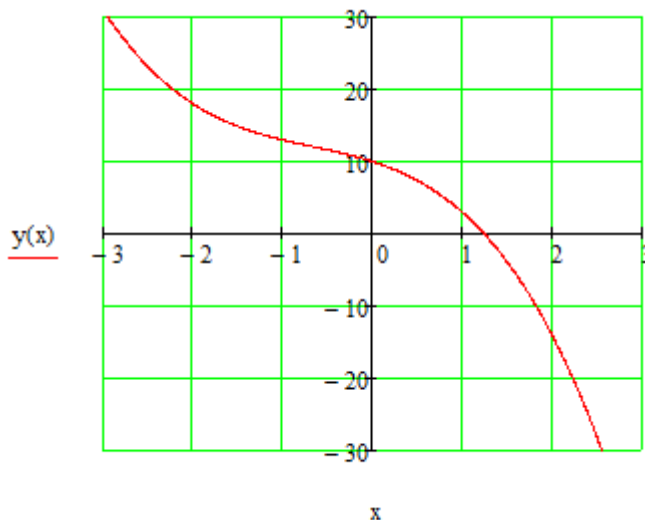


График функции

Условие сходимости метода Ньютона:

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0,$$

где $x_0 = 2$ – начальное приближение, конец интервала.

Проверяем:

$$f(2) = -14,$$

$$f'(x) = -3x^2 - 4x - 4, \quad f''(x) = -6x - 4, \quad f''(2) = -16,$$

$$f(2) \cdot f''(2) = (-14) \cdot (-16) > 0, \text{ значит, метод Ньютона сходится.}$$

Последовательность итерации для метода Ньютона:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Критерий сходимости:

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon.$$

Итак, находим решение:

1 итерация: $x_0 = 2, f(2) = -14, f'(2) = -24,$

$$x_1 = 2 - \frac{(-14)}{(-24)} \approx 1.417, \quad |x_1 - x_0| = 0.583 > \varepsilon = 0.01.$$

2 итерация: $x_1 = 1.417, \quad f(1.417) \approx -2.529, \quad f'(1.417) = -15.692,$

$$x_2 = 1.417 - \frac{(-2.529)}{(-15.692)} \approx 1.256, \quad |x_2 - x_1| = 0.161 > \varepsilon = 0.01.$$

3 итерация: $x_2 = 1.256, \quad f(1.256) \approx -0.16, \quad f'(1.256) = -13.757,$

$$x_3 = 1.256 - \frac{(-0.16)}{(-13.757)} \approx 1.244, \quad |x_3 - x_2| = 0.012 > \varepsilon = 0.01.$$

4 итерация: $x_3 = 1.244, \quad f(1.244) \approx 0.0038, \quad f'(1.244) = -13.619,$

$$x_4 = 1.244 - \frac{0.0038}{(-13.619)} \approx 1.2442, \quad |x_4 - x_3| = 0.0001 < \varepsilon = 0.01.$$

ОТВЕТ: $x = 1.2442.$