Задача с решением по численным методам
Тема: интерполяция функции

ЗАДАНИЕ.

Для функции $y = f(x)$, заданной таблицей своих значений, найти ее приближенное значение в точке $x0$, используя интерполяционные многочлены в форме Ньютона 1-ой и 2-ой степеней. Оценить погрешность приближения по формуле остаточного члена.

Таблица к задаче 2

<table>
<tr><td>№</td><td>$f(x)$</td><td>$x0$</td><td colspan="4">Таблица значений $y = f(x)$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">11</td><td rowspan="4">$\int_0^x e^{t^{3/2}} dt$</td><td rowspan="4">0.78</td><td>x</td><td>0.5</td><td>0.6</td><td>0.7</td></tr>
<tr><td>y</td><td>0.579250</td><td>0.729755</td><td>0.898808</td></tr>
<tr><td>x</td><td>0.8</td><td>0.9</td><td>1.0</td></tr>
<tr><td>y</td><td>1.090475</td><td>1.309671</td><td>1.562402</td></tr>
</table>

РЕШЕНИЕ.

Введем понятие разделенной разности. Разделенные разности нулевого порядка совпадают со значениями функции в узлах. Разделенные разности первого порядка обозначаются $f(x_i, x_j)$ и определяются через разделенные разности нулевого порядка:

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

разделенные разности второго порядка определяются через разделенные разности первого порядка:

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_i, x_j) - f(x_j, x_k)}{x_i - x_k}$$

Разделенная разность порядка $n - k + 2$ определяется соотношениями

$$f(x_i, x_j, x_k, \dots, x_{n-1}, x_n) = \frac{f(x_i, x_j, x_k, \dots, x_{n-1}) - f(x_j, x_k, \dots, x_{n-1}, x_n)}{x_i - x_n}$$

Таким образом, для $(n + 1)$-й точки могут быть построены разделенные разности до n-ого порядка; разделенные разности более высоких порядков равны 0.

Пусть известны значения аппроксимируемой функции $f(x)$ в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Интерполяционный многочлен, значения которого в узлах интерполяции совпадают со значениями функции $f(x)$ может быть записан в виде :

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \dots +$$
$$+(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)f(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

Такая запись называется интерполяционным многочленом Ньютона степени n

Таким образом, для того, чтобы записать многочлен Ньютона первой степени, требуется две точки: x_0 и x_1.

$$P_1(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1)$$

Будем выбирать из таблицы узлы в порядке их близости к заданной точке $x = 0.78$. Так как требуется найти значение в точке $x_0^* = 0.78$, то в качестве x_0 и x_1 естественно выбрать узлы 0.8 и 0.7 соответственно.

x	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y	0.579250	0.729755	0.898808	1.090475	1.309671	1.562402

Тогда

$$x_0 = 0.8; f(x_0) = 1.090475; \quad x_1 = 0.7; f(x_1) = 0.898808$$

$$f(x_0,x_1)=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}=\frac{1.090475-0.898808}{0.8-0.7}=1.916670$$
$$P_1(x)=1.090475+1.916670(x-0.8)$$
$$P_1(0.78)=1.090475+1.916670(0.78-0.8)=1.05214160$$

Аналогично, для того, чтобы записать многочлен Ньютона второй степени, требуется три точки: $x_0,\ x_1,\ x_2$.

$$P_2(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x_0,x_1)+(x-x_0)(x-x_1)f(x_0,x_1,x_2)$$

Будем выбирать из таблицы узлы в порядке их близости к заданной точке $x=0.78$. Так как требуется найти значение в точке $x_0^*=0.78$, то положим

$$x_0=0.8;x_1=0.7;x_2=0.9$$

x	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y	0.579250	0.729755	0.898808	1.090475	1.309671	1.562402

Тогда

$$x_0=0.8;f(x_0)=1.090475;\quad x_1=0.7;f(x_1)=0.898808;x_2=0.9;f(x_2)=1.309671$$
$$f(x_0,x_1)=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}=\frac{1.090475-0.898808}{0.8-0.7}=1.916670$$
$$f(x_1,x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{0.898808-1.309671}{0.7-0.9}=2.054315$$
$$f(x_0,x_1,x_2)=\frac{f(x_0,x_1)-f(x_1,x_2)}{x_0-x_2}=\frac{1.916670-2.054315}{0.8-0.9}=1.376450$$
$$P_2(x)=1.090475+1.916670(x-0.8)+1.376450(x-0.8)(x-0.7)$$
$$P_2(x)=1.090475+1.916670(0.78-0.8)+1.376450(0.78-0.8)(0.78-0.7)=$$
$$=1.04993928$$

Оценим остаточный член, который можно выразить через разделенную разность:

$$r_n=f(x_0,x_1,..x_n)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

Для $P_1(x)$ имеем:

$$r_1=f(x_0,x_1)(x-x_0)(x-x_1)=1.916670(x-0.8)(x-0.7)$$
$$r_1(0.78)=1.916670(0.78-0.7)(0.78-0.8)=-0.003066672$$

Таким образом, погрешность при вычислении не превышает 10^{-2} и полученный результат можно записать с двумя верными цифрами после запятой:

$$f(0.78)=1.05$$

Для $P_2(x)$ имеем:

$$r_2=f(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)=1.916670(x-0.8)(x-0.7)(x-0.9)$$
$$r_2(0.78)=1.376450(0.78-0.7)(0.78-0.8)=0.00026427840$$

Таким образом, погрешность при вычислении не превышает 10^{-3} и полученный результат можно записать с тремя верными цифрами после запятой, округляя, получим:

$$f(0.78)=1.050$$

Вычисление значения функции в точке $x=0.78$

$$f(0.78)=\int_0^{0.78}e^{t^{3/2}}dt$$

с помощью Maple дает: $f(0.78)=1.050102323$

Ответ.

$P_1(x)=1.090475+1.916670(x-0.8);\ \ P_1(0.78)=1.05214160;\ r_1(0.78)$
$=-0.003066672$

$P_2(x)=1.090475+1.916670(x-0.8)+1.376450(x-0.8)(x-0.7);\ \ P_2(x)$
$=1.04993928;\ \ r_2(0.78)=0.00026427840$