Пример решения задачи:
Центр тяжести пластины через двойной интеграл

Задание.

Найти центр тяжести плоской пластины, ограниченной кривой $(x+y)^4 = xy$, *имеющей плотность*

$$\rho = \frac{(x+y)^3}{xy(x^2+y^2+3xy)}$$

Решение.

Вычислим массу заданной пластины

$$m = \iint\limits_D \rho dxdy$$

и статический моменты относительно осей:

$$S_x = \iint\limits_D y \cdot \rho dxdy, \qquad S_y = \iint\limits_D x \cdot \rho dxdy$$

Сделаем замену $x = r\cos^2 t$, $y = r\sin^2 t$

$$J = \begin{vmatrix} \cos^2 t & \sin^2 t \\ -2r\sin t\cos t & 2r\sin t\cos t \end{vmatrix} = 2r\sin t\cos t = r\sin 2t$$

$$\rho = \frac{(x+y)^3}{xy(x^2+y^2+3xy)} = \frac{(x+y)^3}{xy((x+y)^2+xy)}$$

$$= \frac{r^3}{r^2\sin^2 t\cos^2 t\,(r^2+r^2\sin^2 t\cos^2 t)} =$$

$$= \frac{1}{r\cdot\frac{1}{4}\sin^2 2t\left(1+\frac{1}{4}\sin^2 2t\right)} = \frac{16}{r\sin^2 2t\,(4+\sin^2 2t)}$$

Уравнение $(x+y)^4 = xy$ примет вид $r^4 = r^2\cos^2 t\sin^2 t$; $r^2 = \cos^2 t\sin^2 t$, $r = \cos t\sin t$;

$$r = \frac{1}{2}\sin 2t$$

Область интегрирования:

$$\begin{cases} 0 \le r \le \frac{1}{2}\sin 2t \\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}, \qquad \pi \le t \le \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Получим:

$$m=\int_0^{\pi/2}dt\int_0^{\frac{1}{2}\sin 2t}\frac{16}{r\sin^2 2t\,(4+\sin^2 2t)}\cdot r\sin 2t\,dr$$

$$+\int_{\pi}^{3\pi/2}dt\int_0^{\frac{1}{2}\sin 2t}\frac{16}{r\sin^2 2t\,(4+\sin^2 2t)}\cdot r\sin 2t\,dr=$$

$$=2\int_0^{\pi/2}dt\int_0^{\frac{1}{2}\sin 2t}\frac{16}{\sin 2t\,(4+\sin^2 2t)}dr=\int_0^{\pi/2}\frac{16}{4+\sin^2 2t}d(2t)=\frac{4\sqrt{5}}{5}\pi$$

$$S_x=\iint_D y\cdot\rho dxdy=$$

$$=\int_0^{\pi/2}dt\int_0^{\frac{1}{2}\sin 2t}\frac{16r\sin^2 t}{r\sin^2 2t\,(4+\sin^2 2t)}\cdot r\sin 2t\,dr$$

$$+\int_{\pi}^{3\pi/2}dt\int_0^{\frac{1}{2}\sin 2t}\frac{16r\sin^2 t}{r\sin^2 2t\,(4+\sin^2 2t)}\cdot r\sin 2t\,dr=$$

$$=\int_0^{\pi/2}dt\int_0^{\frac{1}{2}\sin 2t}\frac{16\sin 2t}{(4+\sin^2 2t)}\cdot rdr+\int_{\pi}^{3\pi/2}dt\int_0^{\frac{1}{2}\sin 2t}\frac{16\sin 2t}{(4+\sin^2 2t)}\cdot rdr=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{2\sin 2t\sin^2 t}{(4+\sin^2 2t)}dt+\int_{\pi}^{3\pi/2}\frac{2\sin 2t\sin^2 t}{(4+\sin^2 2t)}dt=\frac{\sqrt{5}}{5}\ln\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}+\frac{\sqrt{5}}{5}\ln\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=$$

$$=\frac{2\sqrt{5}}{5}\ln\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$$

$$S_y = \iint_D x \cdot \rho dxdy =$$

$$= \int_0^{\pi/2} dt \int_0^{\frac{1}{2}\sin 2t} \frac{16r\cos^2 t}{r\sin^2 2t\,(4+\sin^2 2t)} \cdot r\sin 2t\, dr$$

$$+ \int_\pi^{3\pi/2} dt \int_0^{\frac{1}{2}\sin 2t} \frac{16r\cos^2 t}{r\sin^2 2t\,(4+\sin^2 2t)} \cdot r\sin 2t\, dr =$$

$$= \int_0^{\pi/2} dt \int_0^{\frac{1}{2}\sin 2t} \frac{16r\cos^2 t}{\sin 2t\,(4+\sin^2 2t)} dr + \int_\pi^{3\pi/2} dt \int_0^{\frac{1}{2}\sin 2t} \frac{16r\cos^2 t}{\sin 2t\,(4+\sin^2 2t)} dr$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin 2t\cos^2 t}{(4+\sin^2 2t)} \cdot dt + \int_\pi^{3\pi/2} \frac{2\sin 2t\cos^2 t}{(4+\sin^2 2t)} dt = \frac{\sqrt{5}}{5}\ln\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} + \frac{\sqrt{5}}{5}\ln\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5}\ln\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$$

Итак, искомые координаты:

$$x_C = \frac{S_x}{m} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}\ln\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}}{\frac{4\sqrt{5}}{5}\pi} = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}; \quad y_C = \frac{S_y}{m} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}\ln\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}}{\frac{4\sqrt{5}}{5}\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$$

ОТВЕТ.

$$\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}; \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\right)$$