Пример решения задачи: объем тела через двойной интеграл

ЗАДАНИЕ.

Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

$$x^2+y^2=2y, \qquad x^2+y^2=5y, \qquad z=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad z=0$$

РЕШЕНИЕ. $x^2+y^2=2y;\ \ x^2+y^2-2y+1=1;\ \ x^2+(y-1)^2=1$

Поверхность представляет собой цилиндр радиуса 1 с осью $x=0, y=1$.

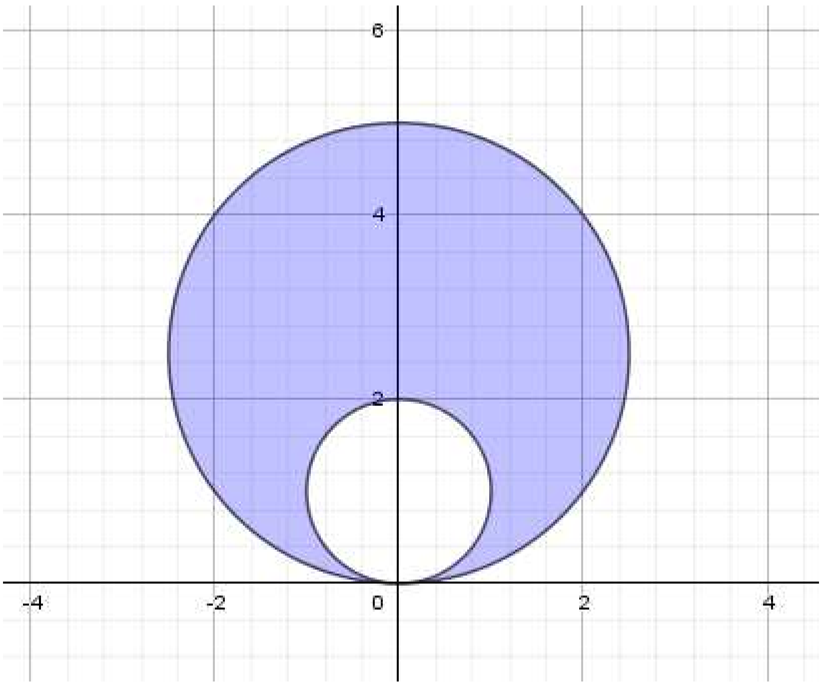
$$x^2+y^2=5y;\ \ x^2+y^2-5y+2.5^2=2.5^2;\ \ x^2+(y-2.5)^2=2.5^2$$

Поверхность представляет собой цилиндр радиуса 2.5 с осью $x=0, y=2.5$.

Заданное цилиндрическое тело заключено между двумя этими цилиндрами, снизу ограничено плоскостью $z=0$, сверху - конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$, то есть

$$V:\begin{cases}0\le z\le\sqrt{x^2+y^2}\\ (x,y)\in D\end{cases}$$

Проекция заданного тела на плоскость Oxy - область D:



Тогда искомый объем равен:

$$V=\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

Для вычисления интеграла перейдем к полярным координатам.

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases};\quad dxdy=rdrd\varphi$$

Область D: $2y\le x^2+y^2\le 5y$ примет вид

$$2r\sin\varphi\le r^2\le 5r\sin\varphi,\qquad 0\le\varphi\le\pi$$

$$2\sin\varphi\le r\le 5\sin\varphi,\qquad 0\le\varphi\le\pi$$

Искомый объем:

$$V=\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_{2\sin\varphi}^{5\sin\varphi}\sqrt{r^2}\cdot rdr=\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_{2\sin\varphi}^{5\sin\varphi}r^2dr=\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{1}{3}r^3\Bigg|_{2\sin\varphi}^{5\sin\varphi}\right)d\varphi$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{5^3-2^3}{3}\sin^3\varphi\right)d\varphi=$$

$$=39\int\limits_0^{\pi}(-\sin^2\varphi)(-\sin\varphi)d\varphi=39\int\limits_0^{\pi}(\cos^2\varphi-1)d(\cos\varphi)$$

$$=39\left(\frac{1}{3}\cos^3\varphi-\cos\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=39\left(\frac{1}{3}\cdot(-1)-(-1)-\frac{1}{3}\cdot 1+1\right)=39\cdot\frac{4}{3}=52$$

Ответ. 52.