

**Пример решения задачи:  
Вычисление двойного интеграла**

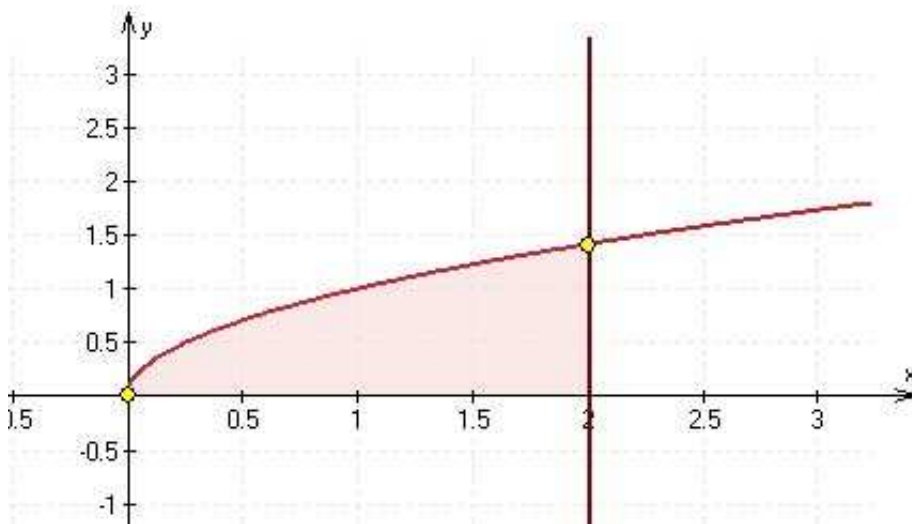
ЗАДАНИЕ.

Вычислить двойной интеграл от функции  $z = f(x, y)$  по области  $D$ , заданной системой неравенств. Область  $D$  изобразить на рисунке.

$$z = x^3 + y^3 - 3xy; \quad 0 \leq x \leq 2, \quad y \leq \sqrt{x}.$$

РЕШЕНИЕ.

Сначала сделаем чертеж области  $D$ .



Вычисляем интеграл, переходя от двойного к повторному:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_D (x^3 + y^3 - 3xy) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{x}} (x^3 + y^3 - 3xy) dy = \int_0^2 dx \left( x^3 y + \frac{1}{4} y^4 - \frac{3}{2} xy^2 \right) \Big|_0^{\sqrt{x}} = \\ &= \int_0^2 \left( x^3 \sqrt{x} + \frac{1}{4} (\sqrt{x})^4 - \frac{3}{2} x (\sqrt{x})^2 \right) dx = \int_0^2 \left( x^{7/2} + \frac{1}{4} x^2 - \frac{3}{2} x^2 \right) dx = \left( \frac{2}{9} x^{9/2} + \frac{1}{12} x^3 - \frac{1}{2} x^3 \right) \Big|_0^2 = \\ &= \left( \frac{2}{9} 2^{9/2} + \frac{1}{12} 2^3 - \frac{1}{2} 2^3 \right) = \frac{2^{11/2}}{9} - \frac{10}{3} = \frac{32}{9} \sqrt{2} - \frac{10}{3}. \end{aligned}$$