

Пример решения задачи:
Вычисление статического момента с помощью двойного интеграла

ЗАДАНИЕ.

Используя двойной интеграл, вычислить статический момент относительно оси Ox тонкой однородной пластинки, имеющей форму области D , ограниченной заданными линиями. Построить чертеж области интегрирования.

Границы области D
$x + y = 1, x^2 = y - 1, x = 1$

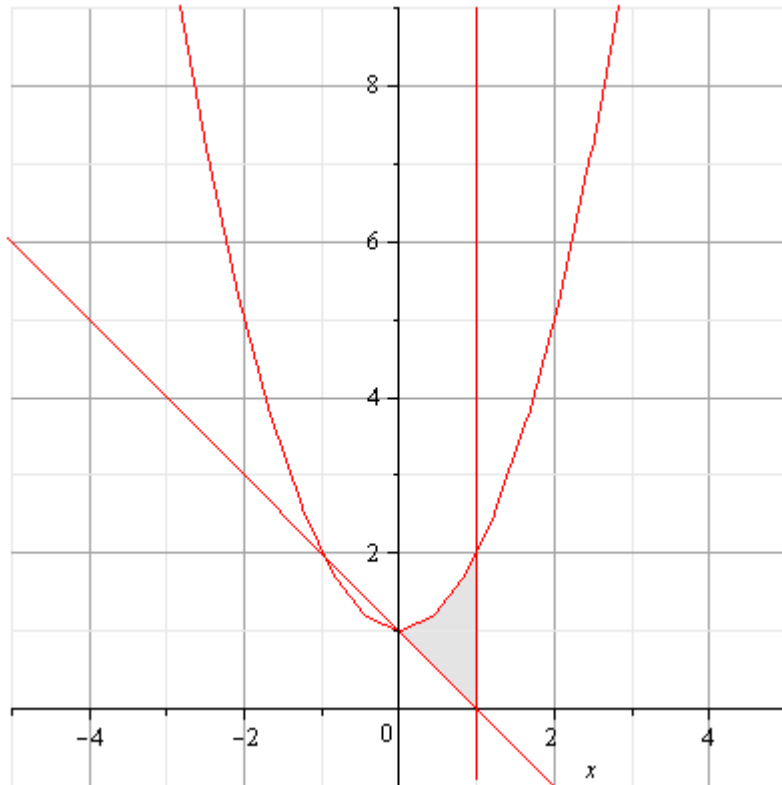
РЕШЕНИЕ.

Статический момент относительно оси Ox находится по формуле:

$$M_x = \iint_D y \cdot \gamma(x, y) dS$$

Так как по условию пластинка однородна, $\gamma(x, y) = 1$

Схематично построим чертеж области D



Область D , таким образом, задается неравенствами:

$$\begin{cases} 1 - x \leq y \leq x^2 + 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Статический момент относительно оси Ox :

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_D y dS = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{x^2+1} y dy = \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} \Big|_{1-x}^{x^2+1} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 ((x^2 + 1)^2 - (1 - x)^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1 - 1 + 2x - x^2) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x^4 + x^2 + 2x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{23}{30} \end{aligned}$$

ОТВЕТ. $M_x = 23/30$.