Пример решения задачи:
Вычисление объема тела с помощью двойного интеграла

ЗАДАНИЕ.

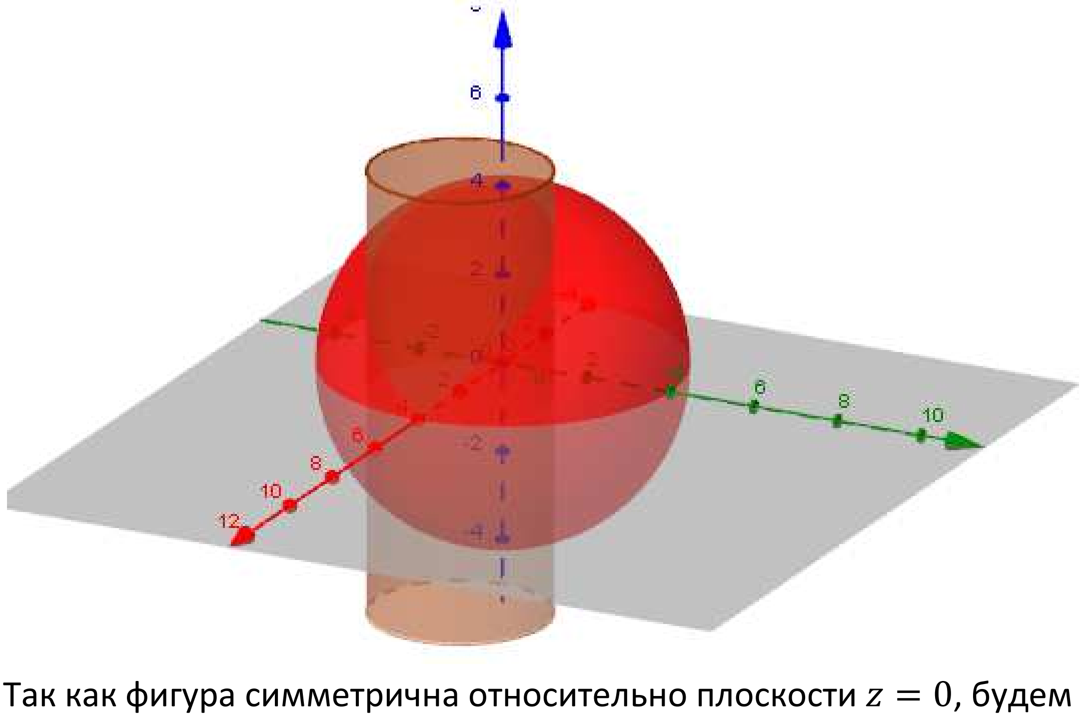
Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями, с помощью двойного и тройного интеграла

$$x^2+y^2=4x, x^2+y^2+z^2=16$$

РЕШЕНИЕ.

$$x^2+y^2=4x \to \ x^2-4x+4+y^2=4 \ \to \ (x-2)^2+y^2=4$$

Уравнение задает круговой цилиндр радиуса 2 с осью $x=2, y=0$.
Второе уравнение задает сферу радиуса 4 с центром в точке начала координат:



Так как фигура симметрична относительно плоскости $z=0$, будем рассматривать половину фигуры при $z \geq 0$. Искомая фигура ограничена снизу плоскостью $z=0$, сверху - поверхностью сферы $x^2+y^2+z^2=0$, с боков - поверхностью цилиндра $(x-2)^2+y^2=4$.

$$V=\iint\limits_D z(x,y)dxdy$$

$$z(x,y)=\sqrt{16-x^2-y^2}$$

D - круг $(x-2)^2+y^2=4$

Перейдем к цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$z=\sqrt{16-r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}=\sqrt{16-r^2}$$

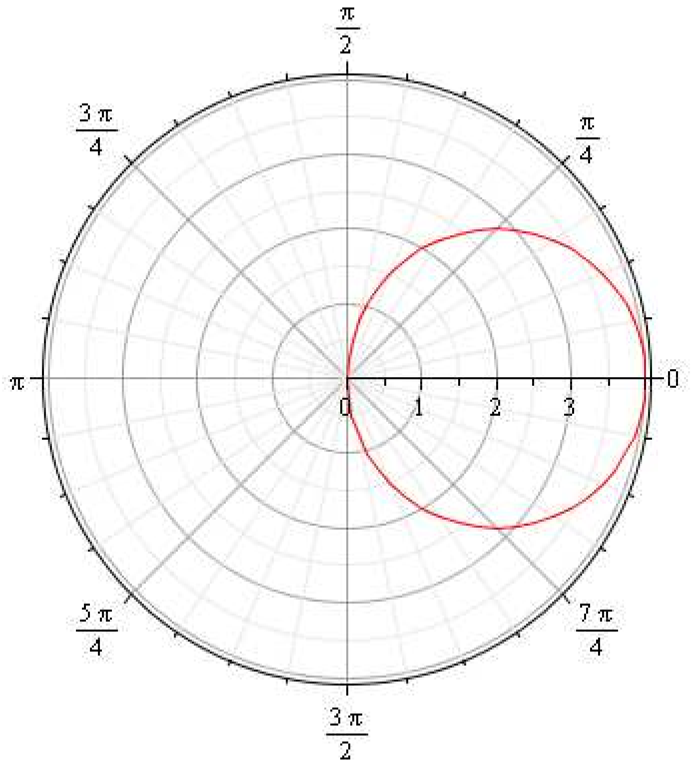
$$(x-2)^2+y^2=4 \;\rightarrow\; x^2+y^2=4x \;\rightarrow\; r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=4r\cos\varphi$$

$$r^2=4r\cos\varphi$$

$$r=4\cos\varphi$$

Итак,

$$D:\ \begin{cases} 0\le r\le 4\cos\varphi \\ 0\le\varphi\le\pi \end{cases}$$



$$V=\iint\limits_D z(x,y)dxdy=\iint\limits_D z(r,\varphi)\cdot r dr d\varphi=\int\limits_0^{\pi} d\varphi\int\limits_0^{4\cos\varphi} r\sqrt{16-r^2}\,dr$$

Найдем внутренний интеграл:

$$\int_0^{4\cos\varphi} r\sqrt{16-r^2}\,dr = -\frac{1}{2}\int_0^{4\cos\varphi} \sqrt{16-r^2}\,(-2r)dr$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{4\cos\varphi} \sqrt{16-r^2}\,d(16-r^2) =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(16-r^2)^{3/2}\Bigg|_0^{4\cos\varphi} = -\frac{1}{3}\left((16-16\cos^2\varphi)^{3/2}-(16-0)^{3/2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\left((16\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}-(4^2)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{3}(4^3-4^3\sin^3\varphi) = \frac{64}{3}(1-\sin^3\varphi)$$

Найдем внешний интеграл:

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{64}{3}(1-\sin^3\varphi)\right)d\varphi = \frac{64}{3}\int_0^{\pi}1d\varphi + \frac{64}{3}\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\,(-\sin\varphi)d\varphi = \frac{64}{3}\varphi\Bigg|_0^{\pi} +$$

$$+\frac{64}{3}\int_0^{\pi}(1-\cos^2\varphi)d(\cos\varphi) = \frac{64}{3}(\pi-0)+\frac{64}{3}\left(\cos\varphi-\frac{1}{3}\cos^3\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{64}{3}\pi+\frac{64}{3}\left(\left(\cos\pi-\frac{1}{3}\cos^3\pi\right)-\left(\cos 0-\frac{1}{3}\cos^3 0\right)\right) =$$

$$= \frac{64}{3}\pi+\frac{64}{3}\left(\left(-1+\frac{1}{3}\right)-\left(1-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{64}{3}\pi+\frac{64}{3}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{64}{3}\pi-\frac{256}{9}$$

Тогда объем всего тела:

$$V = 2\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{4\cos\varphi} r\sqrt{16-r^2}\,dr = 2\left(\frac{64}{3}\pi-\frac{256}{9}\right) = \frac{128}{3}\pi-\frac{512}{9}$$

Найдем объем этого тела с помощью тройного интеграла. Аналогично, будем искать объем только верхней части.

Тело задается неравенствами:

$$V:\begin{cases}0\le z\le\sqrt{16-r^2}\\ 0\le r\le 4\cos\varphi\\ 0\le\varphi\le\pi\end{cases}$$

$$V = \iiint_V dxdydz = \iiint_V rdzdrd\varphi = \int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{4\cos\varphi} rdr\int_0^{\sqrt{16-r^2}} dz$$

$$\int_0^{\sqrt{16-r^2}} dz = z\Big|_0^{\sqrt{16-r^2}} = \sqrt{16-r^2}$$

$$\int_0^{4\cos\varphi} r\sqrt{16-r^2}dr = -\frac{1}{2}\int_0^{4\cos\varphi} \sqrt{16-r^2}\,(-2r)dr$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{4\cos\varphi} \sqrt{16-r^2}\,d(16-r^2) =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(16-r^2)^{3/2}\Big|_0^{4\cos\varphi} = -\frac{1}{3}\left((16-16\cos^2\varphi)^{3/2}-(16-0)^{3/2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\left((16\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}-(4^2)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{3}(4^3-4^3\sin^3\varphi) = \frac{64}{3}(1-\sin^3\varphi)$$

$$\int_0^{\pi}\frac{64}{3}(1-\sin^3\varphi)d\varphi = \frac{64}{3}\int_0^{\pi}1d\varphi + \frac{64}{3}\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\,(-\sin\varphi)d\varphi = \frac{64}{3}\varphi\Big|_0^{\pi} +$$

$$+\frac{64}{3}\int_0^{\pi}(1-\cos^2\varphi)d(\cos\varphi) = \frac{64}{3}(\pi-0)+\frac{64}{3}\left(\cos\varphi-\frac{1}{3}\cos^3\varphi\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{64}{3}\pi+\frac{64}{3}\left(\left(\cos\pi-\frac{1}{3}\cos^3\pi\right)-\left(\cos 0-\frac{1}{3}\cos^3 0\right)\right) =$$

$$= \frac{64}{3}\pi+\frac{64}{3}\left(\left(-1+\frac{1}{3}\right)-\left(1-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{64}{3}\pi+\frac{64}{3}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{64}{3}\pi-\frac{256}{9}$$

Тогда объем всего тела:

$$V = 2\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{4\cos\varphi} r\sqrt{16-r^2}\,dr = 2\left(\frac{64}{3}\pi-\frac{256}{9}\right) = \frac{128}{3}\pi-\frac{512}{9}$$

Ответ. $\frac{128}{3}\pi-\frac{512}{9}$