Пример решения задачи:
Объем тела через двойной интеграл

Задание.

С помощью двойного интеграла вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2, \qquad x^2 - y^2 - z^2 \ge 0, \qquad x \ge 0$$

Решение. Перепишем $x^2 - y^2 - z^2 \ge 0$ в виде $z^2 \le x^2 - y^2$, откуда $-\sqrt{x^2 - y^2} \le z \le \sqrt{x^2 - y^2}$

Заданное тело можно записать в виде:

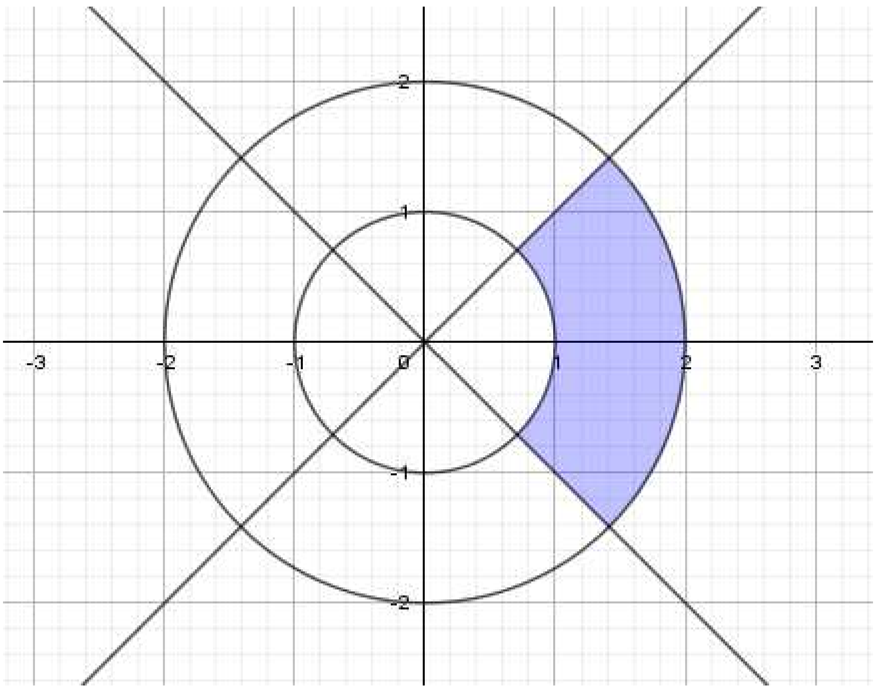
$$\begin{cases} -\sqrt{x^2 - y^2} \le z \le \sqrt{x^2 - y^2} \\ a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

Тогда искомый объем:

$$V = \iint\limits_D \left(\sqrt{x^2 - y^2} - \left(-\sqrt{x^2 - y^2}\right)\right) dxdy = 2 \iint\limits_D \sqrt{x^2 - y^2} dxdy,$$

где D - проекция тела на плоскость Oxy:

$$\begin{cases} a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2 \\ x \ge 0 \\ x^2 - y^2 \ge 0 \end{cases}$$



Для вычисления интеграла перейдем к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}; \quad dxdy = r\,drd\varphi$$

Область D примет вид:

$$\begin{cases} a \le r \le b \\ -\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Тогда искомый объем:

$$V = 2\iint\limits_D \sqrt{x^2 - y^2}dxdy = 2\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_a^b \sqrt{r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi} \cdot r dr =$$

$$= 2\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_a^b \sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi} \cdot r^2 dr = 2\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}\left(\frac{r^3}{3}\Bigg|_a^b\right)d\varphi$$

$$=$$

$$= 4\int\limits_0^{\pi/4} \sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}\left(\frac{r^3}{3}\Bigg|_a^b\right)d\varphi = \frac{4}{3}(b^3 - a^3)\int\limits_0^{\pi/4} \sqrt{\cos 2\varphi}\,d\varphi$$

$$= \begin{vmatrix} p = \cos 2\varphi; \quad \varphi = \dfrac{1}{2}\arccos p & \varphi = \dfrac{\pi}{4} \to p = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0 \\ d\varphi = -\dfrac{1}{2\sqrt{1-p^2}}dp & \varphi = 0 \to p = \cos 0 = 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{4}{3}(b^3 - a^3)\int\limits_1^0 \sqrt{p}\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{1-p^2}}\right)dp = \frac{2}{3}(b^3 - a^3)\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{1-p^2}}dp =$$

$$= \begin{vmatrix} p^2 = t; \quad p = \sqrt{t} & p = 1 \to t = 1 \\ dp = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}dt & p = 0 \to t = 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}(b^3 - a^3)\int\limits_0^1 \frac{\sqrt[4]{t}}{\sqrt{1-t}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}dt =$$

$$= \frac{1}{3}(b^3 - a^3)\int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)\int\limits_0^1 t^{\frac{3}{4}-1}(1-t)^{\frac{1}{2}-1}dt$$

$$= \frac{1}{3}(b^3 - a^3)\mathrm{B}\left(\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right)$$

Учитывая связь между бета-функцией и гамма-функцией, получим:

$$V = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)\mathrm{B}\left(\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}$$

Ответ.

$$V=\frac{1}{3}\left(b^3-a^3\right)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}$$